

Pedro Galhardo
Jair de Souza Júnior

Volume Único

A ARTE DA
MATEMÁTICA
ELEMENTAR

TEORIA ■ MÉTODO ■ DOMÍNIO

COLEÇÃO DE MATEMÁTICA

A ARTE DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Teoria, exemplos e exercícios

PEDRO GALHARDO
JAIR DE SOUZA JÚNIOR

2026

A Arte da Matemática Elementar

1.^a edição – 2026
Aparecida do Taboado – MS
Clube de Autores

© 2026 Pedro Galhardo; Jair de Souza Júnior
Todos os direitos reservados.

Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada ou transmitida, no todo ou em parte, por quaisquer meios, sem autorização prévia dos autores, salvo nos casos previstos em lei.

Texto, seleção de exemplos e organização didática: Pedro Galhardo e Jair de Souza Júnior.
Diagramas e composição elaborados especialmente para esta edição.

Agradeço a todos os amigos que me incentivaram (em especial Gabriel Kenedy), aos meus professores, à Escola Ernesto Rodrigues, à coordenadora Daiane e ao diretor Mauro, e aos meus familiares.

Em especial, ao meu pai Samuel Alves Nogueira, à minha mãe Geovana Galhardo Matozinho, às minhas avós Ozair Alves e Wandica Matozinho e, principalmente, ao meu finado avô Miguel Galhardo Marini.

Prefácio

Este livro nasceu de uma necessidade simples: estudar matemática com **clareza, organização e treino consistente**. Ao longo dos capítulos, o objetivo não é apenas apresentar fórmulas, mas construir intuição: por que funciona, quando usar e como reconhecer o tipo de problema.

Como o livro está organizado

O conteúdo foi dividido em partes que percorrem fundamentos, aritmética, álgebra, funções, contagem, geometria, estatística e notação científica. O percurso foi pensado principalmente para estudantes do Ensino Médio, candidatos a vestibulares e leitores que desejam reconstruir a base antes de enfrentar problemas mais exigentes. Alguns trechos avançam um pouco além do programa usual e servem como primeiro contato com o raciocínio olímpico. Em cada capítulo, você encontra:

- uma motivação e um contexto histórico (para dar sentido ao tema);
- definições e proposições essenciais;
- exemplos resolvidos;
- exercícios em níveis (Fundamentos, Aplicação, Domínio e Coroação);
- um resumo para revisão rápida.

Como estudar

Para aproveitar bem, use este ritmo:

1. leia a teoria e refaça os exemplos com papel e lápis;
2. resolva os exercícios de Fundamentos sem consulta;
3. registre os erros e volte ao ponto exato da dúvida;

4. faça Domínio para misturar conteúdos e ganhar velocidade;
5. deixe Coroação para o final: a ideia   desafiar, não desanimar.

Uma palavra final

Matemática não   um talento misterioso:   um conjunto de habilidades que cresce com prática deliberada. Se você estudar com regularidade, revisar o que erra e insistir um pouco além do confortável, o progresso aparece.

Pedro Galhardo

Como usar este livro

Este livro foi pensado para funcionar tanto como **material de estudo** quanto como **caderno de treino**. A melhor forma de aproveitar é alternar leitura, resolução e revisão.

1. O ritmo recomendado

Para cada capítulo:

1. Leia a **Motivação** e o **Contexto histórico** para entender o porquê do tema.
2. Estude as definições e proposições e **refaça os exemplos** com papel e lápis.
3. Resolva os exercícios de **Fundamentos** sem consulta.
4. Passe para **Aplicação** e **Domínio** para ganhar repertório e velocidade.
5. Deixe a **Coroação** para o final: é normal errar e demorar mais.

2. Como lidar com erros (o que realmente faz você evoluir)

- Mantenha um **registro de erros**: anote o exercício e o tipo de erro (conceito, conta, interpretação, pressa).
- Refaça o exercício depois de 24 horas e, novamente, depois de 7 dias.
- Se você erra sempre no mesmo ponto, volte 1 capítulo e reforce a base.

3. Como usar os capítulos de exercícios

Algumas partes do livro terminam com capítulos só de exercícios. Use-os como **revisão**:

- resolva em blocos de 30–45 minutos;
- corrija no mesmo dia com o gabarito digital;
- marque as questões que valem revisão.

4. Tempo de prova

- Faça uma primeira passada nas questões fáceis.
- Se travar por mais de 4–6 minutos, pule e volte depois.
- Reserve os últimos 10–15 minutos para revisar contas e marcar respostas.

5. Uma sugestão de trilha (16 semanas)

Se você quer um plano simples, use esta trilha:

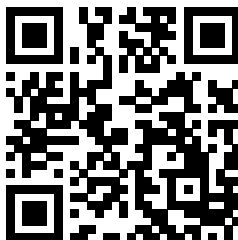
- Semanas 1–2: Partes I e II;
- Semanas 3–6: Partes III e IV;
- Semanas 6–8: Parte V;
- Semanas 8–12: Partes VI e VII;
- Semanas 12–16: Parte VIII e IX + REVISÃO;

6. Como aproveitar o gabarito

O gabarito apresenta respostas e resoluções para os exercícios do livro. Use-o depois de tentar cada questão com autonomia. Ao comparar os caminhos, procure responder:

- Qual foi o primeiro passo que eu não enxerguei?
-

- Eu entendi a ideia ou só copieei?
- Como reconhecer esse tipo de questão na próxima vez?



Acesse o gabarito gratuito
livro.amexatas.com.br/gabarito

SUMÁRIO

Prefácio

Como usar este livro

PARTE I • LINGUAGEM E FUNDAMENTOS	2
1 Lógica Matemática	2
1.1 Introdução	3
1.2 Proposições	3
1.3 Conectivos lógicos	4
1.4 Tabelas-verdade	6
1.5 Equivalências lógicas	7
1.6 Quantificadores.....	8
1.7 Argumentos	8
1.8 Negação lógica (com quantificadores)	8
1.9 Leitura simbólica	9
1.10 Exercícios Propostos	10
1.11 Resumo do capítulo	12

2	Teoria Ingênua dos Conjuntos	13
2.1	Introdução	13
2.2	Pertinência e representação	14
2.2.1	Formas de descrever um conjunto	14
2.2.2	Conjuntos finitos e infinitos	14
2.3	Pertinência não é inclusão	15
2.4	Subconjuntos e igualdade	15
2.5	Conjunto das partes	15
2.5.1	Partições	16
2.6	Operações entre conjuntos	16
2.6.1	União e interseção	16
2.6.2	Diferença e diferença simétrica	16
2.6.3	Complementar	17
2.6.4	Exemplo	17
2.7	Álgebra de conjuntos	18
2.7.1	Leis de De Morgan.....	18
2.8	Cardinalidade.....	18
2.8.1	Inclusão-exclusão para três conjuntos.....	19
2.9	Produto cartesiano	19
2.10	Intervalos reais	20
2.11	Exemplos resolvidos	20
2.12	Exercícios propostos	21
2.13	Resumo do capítulo	23
3	Estruturas Numéricas	24
3.1	Introdução	25
3.2	Naturais.....	25
3.3	Inteiros.....	26
3.4	Operações com inteiros	26
3.5	Racionais.....	27
3.6	Operações com racionais	28
3.7	Irracionais	29
3.8	Reais	29
3.9	Mapa dos Conjuntos Numéricos	29
3.10	Reta Real	30
3.11	Valor Absoluto ou Módulo.....	31
3.12	Ordem.....	32

3.13	Exercícios resolvidos	33
3.14	Exercícios propostos	36
3.15	Resumo do Capítulo	39
4	Exercícios da Parte I: Linguagem e Fundamentos	40
4.1	Exercícios propostos	40
 PARTE II • ARITMÉTICA E NÚMEROS		45
5	Divisibilidade e Números Inteiros	45
5.1	Introdução	46
5.2	Múltiplos e Divisores	46
5.3	CrITÉRIOS de Divisibilidade	47
5.4	Números Primos	48
5.5	Fatoração Prima	48
5.6	Máximo Divisor Comum (MDC)	49
5.7	Mínimo Múltiplo Comum (MMC)	49
5.8	Algoritmo de Euclides	50
5.9	Relação de Bézout	51
5.10	Equações Diofantinas	52
5.11	Exercícios Resolvidos	53
5.12	Exercícios Propostos	55
5.13	Resumo do Capítulo	56
6	Aritmética Modular	57
6.1	Introdução	57
6.2	Congruências	58
6.3	Classes Residuais	59
6.4	Restos	59
6.5	Propriedades	60
6.6	Relógio Modular	61
6.7	Último Algarismo	61
6.8	Aplicações Olímpicas Básicas	62
6.9	Exercícios Resolvidos	65
6.10	Exercícios Propostos	66
6.11	Resumo do Capítulo	67
7	Frações e Razões	68

7.1	Introdução	68
7.2	Frações	69
7.3	Frações Equivalentes	70
7.4	Operações	71
7.5	Comparação	72
7.6	Razões	73
7.7	Escalas	74
7.8	Proporções	74
7.9	O que observar antes de calcular	78
7.10	Exercícios Resolvidos	78
7.11	Exercícios Propostos	80
7.12	Resumo do Capítulo	82
8	Porcentagem e Juros	83
8.1	Introdução	84
8.2	Fator multiplicativo e variação percentual	84
8.3	Porcentagem Direta	84
8.4	Porcentagem Reversa	85
8.5	Acréscimos Sucessivos	85
8.6	Descontos	86
8.7	Juros Simples	86
8.8	Juros Compostos	88
8.9	Crescimento Percentual	89
8.10	Exercícios Resolvidos	90
8.11	Exercícios Propostos	92
8.12	Resumo do Capítulo	93
9	Exercícios da Parte II: Aritmética e Números	94
9.1	Exercícios Propostos	94
	 PARTE III • EXPRESSÕES E ÁLGEBRA	 98
10	Potências e Radicais	98
10.1	Introdução	99
10.2	Potências e propriedades	99
10.3	Expoentes negativos	101
10.4	Expoentes fracionários	101

10.5	Radicais e simplificação	102
10.6	Racionalização	103
10.7	Exercícios Resolvidos	104
10.8	Exercícios Propostos	105
10.9	Resumo do Capítulo	106
11	Produtos Notáveis e Fatoração	108
11.1	Introdução	109
11.2	Produtos notáveis	111
11.3	Fatoração por reconhecimento	113
11.4	Trinômios do 2ª grau	114
11.5	Fatoração por agrupamento	115
11.6	Fatoração e frações algébricas	116
11.7	Exercícios Resolvidos	116
11.8	Exercícios Propostos	118
11.9	Resumo do Capítulo	121
12	Polinômios	122
12.1	Introdução	122
12.2	Polinômios: grau e termos semelhantes	123
12.3	Operações com polinômios	124
12.4	Identidades	124
12.5	Divisão algébrica de polinômios	125
12.6	Briot–Ruffini	125
12.7	Resto, fator e raízes	126
12.8	Exercícios Resolvidos	127
12.9	Exercícios Propostos	128
12.10	Resumo do Capítulo	130
13	Equações e Inequações	131
13.1	Introdução	132
13.2	Equações do 1ª grau	132
13.3	Equações do 2ª grau	133
13.4	Equações biquadradas	135
13.5	Equações modulares	135
13.6	Equações irracionais	136
13.7	Equações exponenciais básicas	137
13.8	Inequações diversas	137

13.9 Exercícios Resolvidos	138
13.10 Exercícios Propostos	139
13.11 Resumo do Capítulo	141
14 Exercícios da Parte III: Expressões e Álgebra	142
14.1 Exercícios Propostos	142
 PARTE IV • RELAÇÕES E FUNÇÕES	 146
15 Relações e Funções	146
15.1 Introdução	147
15.2 Pares ordenados e produto cartesiano	147
15.3 Relações	147
15.4 Funções	148
15.5 Representações de funções e gráficos	150
15.6 Crescimento	152
15.7 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas	153
15.8 Composição de funções	153
15.9 Função inversa	153
15.10 Exercícios Propostos	154
15.11 Resumo do Capítulo	157
16 Função Afim e Quadrática	158
16.1 Introdução	159
16.2 Função afim	159
16.3 Função quadrática	161
16.4 Exercícios Propostos	165
16.5 Resumo do Capítulo	167
17 Funções Clássicas	168
17.1 Introdução	169
17.2 Função modular	169
17.3 Função exponencial	171
17.4 Função logarítmica	172
17.5 Funções definidas por partes	173
17.6 Transformações gráficas	173
17.7 Exercícios Propostos	174
17.8 Resumo do Capítulo	179

18 Logaritmos	181
18.1 Introdução	182
18.2 Definição de logaritmo	182
18.3 Propriedades dos logaritmos	183
18.4 Mudança de base	184
18.5 Função logarítmica	184
18.6 Equações logarítmicas	186
18.7 Inequações logarítmicas	187
18.8 Exercícios Propostos	188
18.9 Resumo do Capítulo	189
19 Exercícios da Parte IV: Relações e Funções	190
19.1 Exercícios Propostos	190
 PARTE V • CONTAGEM E SEQUÊNCIAS	 194
20 Análise Combinatória	194
20.1 Introdução	194
20.2 Princípios de contagem	195
20.2.1 Princípio aditivo	195
20.2.2 Princípio fundamental da contagem	195
20.2.3 Contagem pelo complemento	196
20.3 Fatorial	196
20.4 Permutações	197
20.4.1 Permutação simples	197
20.4.2 Permutação com repetição	197
20.4.3 Permutação circular	198
20.5 Arranjos	198
20.5.1 Arranjos com repetição	198
20.6 Combinações	199
20.6.1 Duas propriedades importantes	199
20.6.2 Combinação com repetição	199
20.7 Binômio de Newton	200
20.8 Restrições e divisão em casos	201
20.9 Exercícios Propostos	201
20.10 Resumo do Capítulo	202
21 Probabilidade	203

21.1	Introdução	203
21.2	Experimentos, resultados e eventos	204
21.2.1	A descrição do resultado importa.....	204
21.3	Atribuição de probabilidades	205
21.3.1	Modelo equiprovável	205
21.3.2	Complemento	205
21.4	Operações entre eventos.....	206
21.5	Probabilidade condicional	207
21.5.1	Árvore de probabilidades.....	207
21.6	Independência	208
21.7	Probabilidade total e Teorema de Bayes	208
21.8	Ensaio repetidos e distribuição binomial	209
21.9	Contagem aplicada à probabilidade	209
21.10	Valor esperado.....	210
21.11	Exercícios Propostos	210
21.12	Resumo do Capítulo.....	212
22	Sequências Numéricas	213
22.1	Introdução	214
22.2	Como uma sequência pode ser descrita.....	214
22.3	Padrões	215
22.4	Recorrências	215
22.5	Sequência de Fibonacci	216
22.6	PA (Progressão Aritmética).....	216
22.7	PG (Progressão Geométrica).....	217
22.8	Soma de termos	217
22.9	Exercícios Propostos	218
22.10	Resumo do Capítulo.....	219
23	Exercícios da Parte V: Contagem e Sequências	220
23.1	Exercícios Propostos	220
PARTE VI •	ÁLGEBRA LINEAR ELEMENTAR	224
24	Sistemas Lineares	224
24.1	Introdução	225
24.2	Teoremas e testes.....	225

24.3	Método da substituição	226
24.4	Método da adição.....	227
24.5	Interpretação geométrica	228
24.6	Escalonamento	230
24.7	Sistemas homogêneos.....	231
24.8	Discussão de sistemas.....	231
24.9	Exercícios Propostos	231
24.10	Resumo do Capítulo.....	235
25	Matrizes	236
25.1	Introdução	237
25.2	Tipos especiais de matrizes	238
25.3	Igualdade de matrizes	239
25.4	Adição e subtração	239
25.5	Multiplicação por escalar	240
25.6	Multiplicação de matrizes.....	240
25.7	Interpretação geométrica	243
25.8	Matriz transposta.....	246
25.9	Matrizes e sistemas lineares	247
25.10	Exercícios Propostos	247
25.11	Resumo do Capítulo.....	250
26	Determinantes	251
26.1	Introdução	252
26.2	Determinante de ordem 2.....	252
26.3	Interpretação geométrica	254
26.4	Determinante de ordem 3.....	255
26.5	Determinantes maiores	257
26.6	Exercícios Propostos	259
26.7	Resumo do Capítulo.....	261
PARTE VII • GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		263
27	Geometria Plana	263
27.1	Fundamentos	263
27.1.1	Ponto, reta e plano.....	263
27.1.2	Segmentos.....	264

27.1.3	Paralelismo e perpendicularismo	264
27.1.4	Noções de perímetro e área	265
27.1.5	Ângulos	265
27.2	Triângulos	266
27.2.1	Classificação	266
27.2.2	Existência e comparação de lados	268
27.2.3	Soma dos ângulos internos.....	268
27.2.4	Congruência	269
27.2.5	Área de triângulos	270
27.2.6	Elementos notáveis	270
27.2.7	Teorema de Pitágoras.....	272
27.2.8	Semelhança	273
27.2.9	Teoremas de Ceva e Menelau	274
27.3	Quadriláteros	276
27.3.1	Paralelogramo	276
27.3.2	Retângulo	277
27.3.3	Quadrado.....	277
27.3.4	Losango	277
27.3.5	Trapézio	277
27.4	Polígonos	278
27.4.1	Diagonais	278
27.4.2	Soma dos ângulos internos.....	278
27.4.3	Polígonos regulares.....	278
27.5	Circunferência e Círculo	279
27.5.1	Elementos fundamentais	279
27.5.2	Ângulos na circunferência	280
27.5.3	Posições relativas entre circunferências.....	284
27.5.4	Comprimento da circunferência	285
27.5.5	Área do círculo.....	285
27.6	Áreas Planas e Problemas Integradores	286
27.6.1	Figuras compostas	286
27.6.2	Decomposição	286
27.6.3	Problemas	287
27.7	Exercícios Propostos	287
27.8	Resumo do Capítulo.....	289
28	Trigonometria: Razões Trigonométricas	290
28.1	Triângulo retângulo e nomenclatura	290
28.2	Razões trigonométricas	291

28.2.1	Seno	292
28.2.2	Cosseno	292
28.2.3	Tangente	293
28.2.4	As três razões na mesma figura	293
28.2.5	Valores notáveis (primeiro quadrante)	294
28.3	Relações úteis.....	295
28.3.1	Identidade fundamental no triângulo retângulo	295
28.3.2	Complementares.....	296
28.4	Resolução de triângulos retângulos	296
28.4.1	Encontrando um comprimento	297
28.4.2	Encontrando um ângulo.....	297
28.4.3	Inclinação e porcentagem	298
28.4.4	Ângulos de elevação e depressão	298
28.5	Triângulos quaisquer.....	300
28.5.1	Lei dos Senos.....	300
28.5.2	Lei dos Cossenos.....	301
28.6	Exercícios Propostos	302
28.7	Resumo do Capítulo.....	304
29	Ciclo Trigonométrico	305
29.1	Arcos orientados	305
29.2	Medida em radianos.....	306
29.3	O ciclo e suas coordenadas	307
29.4	Quadrantes e sinais	308
29.5	Valores notáveis	309
29.6	Arco de referência e simetrias	310
29.7	Periodicidade	311
29.8	Exercícios Propostos	311
29.9	Resumo do Capítulo.....	313
30	Identidades e Equações Trigonômicas	314
30.1	Identidade e equação.....	314
30.2	Relações fundamentais.....	315
30.2.1	Identidade pitagórica	315
30.2.2	Relações com a tangente	316
30.3	Soma e diferença de arcos	316
30.4	Ângulo duplo e redução de potências	318
30.5	Equações trigonométricas básicas.....	318

30.5.1	Equações com seno	319
30.5.2	Equações com cosseno	319
30.5.3	Equações com tangente	320
30.5.4	Equações com quadrados.....	320
30.6	Exercícios Propostos	320
30.7	Resumo do Capítulo.....	321
31	Exercícios de Geometria Plana e Trigonometria	322
31.1	Geometria Plana.....	322
31.2	Trigonometria	324
31.3	Problemas integradores (Geo + Trig).....	325
32	Geometria Espacial: Fundamentos, Prismas, Cilindros e Pirâmides	327
32.1	Fundamentos no espaço	327
32.1.1	Ponto, reta e plano.....	327
32.1.2	Distâncias e seções	328
32.2	Poliedros, faces, arestas e vértices.....	328
32.3	Prismas	329
32.3.1	Definição	329
32.3.2	Prismas mais comuns (visual).....	330
32.3.3	Prisma reto	330
32.4	Cilindros	331
32.4.1	Definição	331
32.5	Pirâmides	331
32.5.1	Definição	332
32.6	Exercícios Propostos	332
32.7	Resumo do Capítulo.....	333
33	Geometria Espacial: Cones e Esferas	335
33.1	Cones	335
33.1.1	Cone reto: definição e elementos	335
33.1.2	Áreas e volume	336
33.1.3	Tronco de cone (opcional, mas muito útil)	337
33.2	Esferas	337
33.2.1	Definição	337
33.2.2	Seções planas da esfera.....	338
33.2.3	Área e volume.....	338
33.3	Exercícios Propostos	339

33.4	Resumo do Capítulo.....	340
34	Geometria Analítica: Pontos e Retas no Plano	341
34.1	O plano cartesiano e o ponto	341
34.1.1	Quadrantes.....	341
34.2	Distância entre dois pontos.....	342
34.3	Ponto médio de um segmento	342
34.4	Inclinação e equações da reta.....	343
34.4.1	Coefficiente angular (inclinação)	343
34.4.2	Equação reduzida: $y = mx + b$	343
34.4.3	Forma geral: $ax + by + c = 0$	344
34.4.4	Forma ponto-inclinação	344
34.4.5	Retas paralelas e perpendiculares.....	344
34.4.6	Distância de um ponto a uma reta.....	345
34.5	Interseção de duas retas	345
34.6	Exercícios Propostos	346
34.7	Resumo do Capítulo.....	347
35	Geometria Analítica: Circunferência e Lugares Geométricos	348
35.1	Lugares geométricos (ideia geral)	348
35.2	Circunferência: definição e equação reduzida	349
35.3	Equação geral e completar quadrados	350
35.4	Interseção entre reta e circunferência.....	350
35.5	Tangência e distância do ponto à reta.....	351
35.6	Exercícios Propostos	352
35.7	Resumo do Capítulo.....	353
36	Exercícios de Geometria Espacial e Analítica	355
36.1	Exercícios Propostos	355
PARTE VIII • REPRESENTAÇÃO E MODELAGEM		360
37	Estatística Descritiva	360
37.1	Dados, tabelas e frequências.....	360
37.2	Medidas de tendência central.....	361
37.2.1	Média.....	361
37.2.2	Média ponderada	361
37.2.3	Mediana	361
37.2.4	Quartis e boxplot	362

37.2.5	Moda	362
37.3	Medidas de dispersão	363
37.3.1	Variância	363
37.3.2	Desvio padrão.....	363
37.3.3	Coeficiente de variação.....	364
37.4	Leitura e interpretação de gráficos	364
37.4.1	Gráfico de barras (comparação de categorias)	364
37.4.2	Histograma (dados em intervalos)	364
37.4.3	Cuidados na leitura	365
37.5	Exercícios Propostos	365
37.6	Resumo do Capítulo.....	366
38	Unidades e Notação Científica	368
38.1	Sistema métrico e prefixos	368
38.2	Conversões no sistema métrico	369
38.2.1	Comprimento, área e volume	369
38.2.2	Litro e metro cúbico	370
38.2.3	Massa, tempo e temperatura	370
38.3	Análise dimensional.....	370
38.4	Ordem de grandeza	371
38.5	Notação científica	372
38.5.1	Operações com notação científica	372
38.6	Algarismos significativos	372
38.6.1	Regras básicas.....	372
38.6.2	Arredondamento.....	373
38.7	Exercícios Propostos	373
38.8	Resumo do Capítulo.....	374
39	Exercícios de Estatística Descritiva e Notação Científica	375
39.1	Exercícios Propostos	375
39.2	Resumo do Capítulo.....	377
 PARTE IX • APÊNDICE DE MATURIDADE MATEMÁTICA		 379
40	Apêndice de Maturidade Matemática	379
40.1	Quando o começo ainda não apareceu	379
40.2	Interpretação de problemas	380

40.2.1	Pergunta, dados e restrições	380
40.2.2	Palavras que viram matemática	380
40.3	Heurísticas (quando você trava)	380
40.4	Erros comuns (e como evitar)	381
40.5	Gestão de tempo em prova	381
40.6	Reconhecendo a natureza do problema	382
40.6.1	Misturas, médias e porcentagens	382
40.6.2	Problemas de contagem	382
40.6.3	Problemas geométricos	382
40.6.4	Problemas com funções	382
40.7	Exercícios rápidos (treino de maturidade)	382
40.8	Resumo do Apêndice	383
41	Técnicas Clássicas	384
41.1	Substituição inteligente	384
41.2	Simetria	385
41.3	Estimativa	385
41.4	Casos extremos	386
41.5	Invariantes básicos	386
41.6	Exercícios Propostos	387
41.7	Resumo do Capítulo	388
42	Exercícios Gerais	389
42.1	Exercícios Propostos	389
	Bibliografia	393
	Agradecimentos	395

PARTE I • LINGUAGEM E FUNDAMENTOS

CAPÍTULO 1

Lógica Matemática

Motivação 1.1

Quando dizemos que a matemática exige demonstrações, estamos falando de uma pergunta antiga: **como distinguir um argumento correto de um argumento apenas convincente?** Em muitos contextos, exemplos parecem suficientes, mas exemplos isolados não garantem que uma afirmação seja sempre verdadeira.

A **Lógica Matemática** surge justamente para organizar o raciocínio de maneira rigorosa, separando a **forma** do argumento de seu conteúdo. Assim, aprendemos a analisar hipóteses, conclusões, implicações e negações sem depender apenas da intuição.

Contexto histórico 1.1

Na tradição grega, Aristóteles sistematizou regras para argumentos por meio dos silogismos. Sua principal ideia era que a validade de um raciocínio depende da estrutura lógica utilizada, e não do assunto tratado.

Séculos depois, George Boole desenvolveu a álgebra booleana, permitindo tratar proposições de forma algébrica. Mais tarde, Frege, Russell e Whitehead ampliaram a lógica formal com o uso de quantificadores e linguagens rigorosas.

No século XX, essas ideias passaram a ter papel central na computação: circuitos digitais, algoritmos e programas funcionam como formas de **lógica aplicada**. Hoje, a lógica é essencial tanto para a matemática quanto para áreas como ciência da computação, engenharia e inteligência artificial.

Teste 1.1 (Validade por tabela-verdade). Um argumento é válido se, em toda linha da tabela-verdade em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

1.1 Introdução

Antes de números, fórmulas e equações, existe algo ainda mais fundamental: o raciocínio. A lógica matemática estuda as regras que permitem construir argumentos corretos, detectar falhas de pensamento e expressar ideias com precisão.

No cotidiano, usamos lógica sem perceber. Quando dizemos “se chover, levarei guarda-chuva” ou “ou estudo hoje ou acumulo matéria”, estamos conectando afirmações de maneira estruturada.

Na matemática (e também em computação, direito e filosofia), pequenas diferenças na forma de uma frase podem mudar completamente o que ela significa. Por exemplo, afirmar “se p , então q ” não é o mesmo que afirmar “ p e q ”; e negar uma frase com “para todo” exige trocar a estrutura, não apenas colocar um “não”.

A lógica não substitui a criatividade; ela só garante que o caminho escolhido não desabe no meio.

Ao longo do capítulo, você vai aprender a linguagem básica para escrever, organizar e testar raciocínios com precisão: proposições, conectivos, tabelas-verdade, equivalências, quantificadores e validade de argumentos.

1.2 Proposições

Chamamos de **proposição** toda sentença declarativa que pode ser classificada como **verdadeira** (V) ou **falsa** (F).

Exemplos

- $2 + 3 = 5$ (V)
- 7 é número par (F)
- O Brasil fica na América do Sul (V)
- $10 < 4$ (F)

Exemplos mais desafiadores (e por quê)

- “Se 2 é ímpar, então 5 é primo.” (V) — a parte “2 é ímpar” é falsa, e condicionais com antecedente falso são verdadeiras.

- “Todo número natural é par.” (F) — basta um contraexemplo (por exemplo, 1).
- “Existe um número natural n tal que $n^2 = 2$.” (F) — apesar de $\sqrt{2}$ existir nos reais, ele não é natural.
- “Para todo real x , vale $x^2 \geq 0$.” (V) — é uma afirmação universal verdadeira.
- “ π é racional ou π é irracional.” (V) — é uma tautologia do tipo “ $p \vee \neg p$ ”, mesmo sem saber qual das duas é verdadeira.

Não são proposições

- Feche a porta.
- Que horas são?
- $x + 2 = 7$

Ordens, perguntas e sentenças abertas não possuem valor lógico definido.

1.3 Conectivos lógicos

Podemos formar proposições compostas unindo proposições simples. Vamos fixar duas proposições para servir de exemplo:

p : “Está chovendo”.

q : “Levarei guarda-chuva”.

Negação

A negação de p é representada por $\neg p$.

$\neg p$: “Não está chovendo”.

Conjunção

Representada por $p \wedge q$, significa “ p e q ”.

$p \wedge q$: “Está chovendo e levarei guarda-chuva”.

Disjunção inclusiva

Representada por $p \vee q$, significa “ p ou q ”.

$p \vee q$: “Está chovendo ou levarei guarda-chuva”.

A disjunção apresentada acima é chamada de **disjunção inclusiva**. Nesse caso, a proposição será verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira, inclusive quando ambas forem verdadeiras.

Disjunção exclusiva

Em alguns contextos, o conectivo “ou” indica exclusão: apenas uma das proposições pode ser verdadeira.

Representamos isso por:

$$p \underline{\vee} q$$

Lemos:

“Ou p ou q ”

Exemplo:

“Ou estudo matemática, ou jogo videogame.”

Nesse caso, entende-se que as duas coisas não acontecem ao mesmo tempo. A disjunção exclusiva também pode ser escrita como:

$$(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Condicional

Representada por $p \rightarrow q$, significa “se p , então q ”.

$p \rightarrow q$: “Se está chovendo, então levarei guarda-chuva”.

Bicondicional

Representada por $p \leftrightarrow q$, significa “ p se, e somente se, q ”.

$p \leftrightarrow q$: “Estudo matemática se, e somente se, aprendo lógica”.

1.4 Tabelas-verdade

As tabelas-verdade exibem o valor lógico de proposições compostas para todas as combinações possíveis de V e F.

Negação

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção exclusiva

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A condicional só é falsa quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa.

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A bicondicional é verdadeira quando as duas proposições possuem o mesmo valor lógico.

1.5 Equivalências lógicas

Duas proposições são logicamente equivalentes quando apresentam sempre o mesmo valor lógico. Escrevemos isso como $\equiv$.

Identidades importantes

Lei da dupla negação

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

Leis de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Equivalência da condicional

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$

Essas relações são ferramentas valiosas para transformar expressões e simplificar argumentos.

1.6 Quantificadores

Quantificadores são usados quando falamos sobre elementos de um conjunto.

Quantificador universal

O símbolo $\forall$ indica “para todo”.

Exemplo:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

Quantificador existencial

O símbolo $\exists$ indica “existe pelo menos um”.

Exemplo:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 25.$$

1.7 Argumentos

Um argumento é formado por **premissas** e uma **conclusão**. Dizemos que o argumento é **válido** quando a conclusão decorre corretamente das premissas.

Exemplo

- Todo múltiplo de 4 é par.
- 20 é múltiplo de 4.
- Logo, 20 é par.

1.8 Negação lógica (com quantificadores)

Negar corretamente uma frase exige cuidado: muitas vezes a negação não é “trocar por não”, e sim alterar a estrutura da afirmação.

Exemplo 1

Frase:

Todo aluno estudou.

Negação:

Existe pelo menos um aluno que não estudou.

Exemplo 2

Frase:

Existe um número negativo.

Negação:

Nenhum número é negativo.

1.9 Leitura simbólica

Traduzir frases para símbolos é essencial para escrever argumentos de forma curta, clara e sem ambiguidade.

Exemplo

Sejam:

p : “Estudo matemática”.

q : “Aprendo lógica”.

Então:

- Estudo matemática e aprendo lógica: $p \wedge q$.
- Estudo matemática ou aprendo lógica: $p \vee q$.
- Se estudo matemática, então aprendo lógica: $p \rightarrow q$.
- Estudo matemática se, e somente se, aprendo lógica: $p \leftrightarrow q$.
- Não estudo matemática: $\neg p$.

1.10 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Classifique como proposição ou não proposição:
 1. 5 é primo.
 2. Abra a janela.
 3. $x + 3 = 9$.
 4. “A Lua é um satélite natural da Terra.”
 5. “Qual é o seu nome?”
2. Negue:
 - a. Hoje faz calor.
 - b. Todo número par é divisível por 2.
 - c. Existe um aluno canhoto na turma.
3. Dê um exemplo de sentença aberta (que depende de uma variável) e explique por que ela não é uma proposição.
4. Escreva duas proposições diferentes que tenham o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas).

Aplicação

5. Construa a tabela-verdade de $p \rightarrow q$.
6. Escreva simbolicamente:
 - a. Estudo e trabalho.
 - b. Se chove, fico em casa.
 - c. Ou faço exercícios, ou jogo videogame.
7. Considere as proposições p : “Vou ao cinema” e q : “Vou ao teatro”. Escreva, em português, as proposições:
 - a. $\neg p$;

1. LÓGICA MATEMÁTICA

- b. $p \wedge q$;
- c. $p \vee q$;
- d. $p \rightarrow q$;
- e. $p \leftrightarrow q$.

8. Use equivalências lógicas para reescrever $\neg(p \rightarrow q)$ sem o conectivo $\rightarrow$.

Domínio

9. Negue corretamente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > 0.$$

10. Verifique se o argumento é válido:

- Todo múltiplo de 3 é inteiro.
- 12 é inteiro.
- Logo, 12 é múltiplo de 3.

11. Determine se as proposições $p \vee q$ e $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ são equivalentes. Justifique.

12. Negue corretamente a afirmação:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 10.$$

Coroação

13. Em uma ilha, cada habitante sempre mente ou sempre diz a verdade. Um morador afirma:

“Eu sou mentiroso.”

Explique por que essa frase gera um paradoxo lógico.

14. (Desafio) Sejam p e q proposições. Mostre, usando tabela-verdade, que

$$p \rightarrow q$$

é logicamente equivalente a

$$\neg p \vee q.$$

1.11 Resumo do capítulo

Neste capítulo você viu:

- o que são proposições e como reconhecê-las;
- conectivos lógicos e seus significados;
- como montar e ler tabelas-verdade;
- equivalências úteis para transformar expressões;
- quantificadores e negações com quantificadores;
- a ideia de validade de um argumento.

A lógica matemática será base para vários temas futuros do livro.

CAPÍTULO 2

Teoria Ingênua dos Conjuntos

Motivação 2.1

Agrupar e organizar objetos é uma necessidade natural: separamos livros por tema, alunos por turma e números por propriedades. A matemática formaliza essa ideia por meio dos **conjuntos**, que permitem descrever coleções de elementos com precisão.

Essa linguagem aparece em definições de relações, funções, intervalos, probabilidade e praticamente toda a estrutura da matemática moderna.

Contexto histórico 2.1

No século XIX, Georg Cantor desenvolveu a Teoria dos Conjuntos ao estudar coleções infinitas. Seu trabalho revelou que existem infinitos de tamanhos diferentes, ideia que transformou os fundamentos da matemática.

As descobertas de Cantor também trouxeram paradoxos, mostrando que nem toda descrição informal produz um conjunto sem contradições. Por isso surgiram teorias axiomáticas mais rigorosas. Neste capítulo usaremos uma abordagem intuitiva, suficiente para compreender pertinência, inclusão, operações e aplicações elementares.

2.1 Introdução

Um **conjunto** é uma coleção de objetos considerados como uma unidade. Esses objetos são seus **elementos**. Para que a descrição seja matematicamente útil, deve ser possível decidir se um objeto pertence ou não ao conjunto.

O conjunto dos números pares menores que dez é bem definido. Já a expressão “o conjunto dos filmes bons” depende de um julgamento e, sem um critério adicional, não determina uma coleção precisa.

Em um conjunto, a ordem e a repetição não alteram os elementos. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 3\}.$$

As chaves indicam que estamos tratando uma coleção, e não uma sequência.

2.2 Pertinência e representação

Se um objeto x é elemento de um conjunto A , escrevemos

$$x \in A.$$

Se não é elemento, escrevemos $x \notin A$.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $3 \in A$ e $7 \notin A$.

2.2.1 Formas de descrever um conjunto

Um conjunto pode ser apresentado:

- por **enumeração**: $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
- por uma **propriedade característica**:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } 2 \leq x \leq 8\};$$

- por um **diagrama**, quando a posição dos elementos ou a relação entre conjuntos ajuda na interpretação.

Na notação por propriedade, a barra vertical $|$ pode ser lida como “tal que”.

2.2.2 Conjuntos finitos e infinitos

Um conjunto é **finito** quando possui uma quantidade determinada de elementos. Caso contrário, é **infinito**. Por exemplo,

$$\{a, e, i, o, u\}$$

é finito, enquanto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é infinito.

As reticências só devem ser usadas quando o padrão estiver claro. A escrita $\{1, 2, 3, \dots\}$ é compreensível; uma lista como $\{1, 2, 4, \dots\}$ precisa de mais informação para determinar seus próximos elementos.

2.3 Pertinência não é inclusão

Pertinência relaciona um **elemento** a um conjunto. Inclusão relaciona **dois conjuntos**. Se

$$A = \{1, 2, 3\},$$

então $1 \in A$, mas $\{1\} \subseteq A$. Em geral, não devemos trocar os símbolos $\in$ e $\subseteq$.

Um conjunto pode, contudo, ser elemento de outro conjunto. Se

$$C = \{\{1\}, 2, 3\},$$

então $\{1\} \in C$, enquanto $1 \notin C$. Esse exemplo explica por que o conjunto vazio e o conjunto que contém o vazio são diferentes:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}.$$

O primeiro não possui elementos; o segundo possui exatamente um elemento, que é $\emptyset$.

2.4 Subconjuntos e igualdade

Dizemos que A é **subconjunto** de B quando todo elemento de A também pertence a B :

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B e escrevemos $A \subsetneq B$.

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos:

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A).$$

O conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto. De fato, não existe elemento do vazio que possa contrariar a condição de inclusão.

2.5 Conjunto das partes

O **conjunto das partes** de A , indicado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A .

Se $A = \{a, b\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Observe que os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são conjuntos.

Se A possui n elementos, cada elemento pode ser incluído ou não em um subconjunto. Como há duas escolhas independentes para cada um,

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

2.5.1 Partições

Uma **partição** de um conjunto A é uma família de subconjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, cuja união é A . Por exemplo,

$$\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$$

é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada elemento aparece em exatamente um dos blocos.

2.6 Operações entre conjuntos

Fixemos dois conjuntos A e B dentro de um universo Ω .

2.6.1 União e interseção

A **união** reúne os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

O “ou” é inclusivo: elementos da interseção também pertencem à união.

A **interseção** reúne os elementos comuns:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, os conjuntos são chamados **disjuntos**.

2.6.2 Diferença e diferença simétrica

A diferença $A - B$ reúne os elementos que pertencem a A , mas não a B :

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Em geral, $A - B \neq B - A$.

A **diferença simétrica** reúne os elementos que pertencem a exatamente um dos conjuntos:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

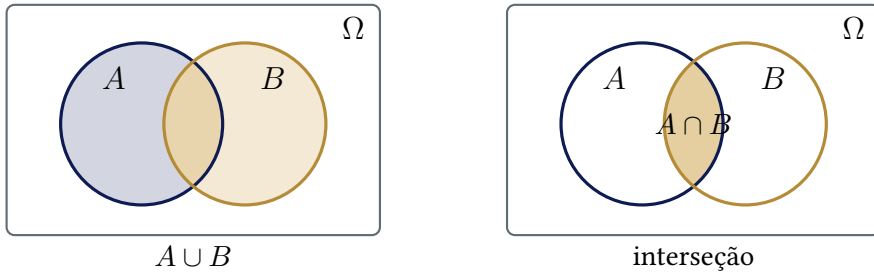


Figura 2.1: Na união destacamos as duas regiões; na interseção, apenas a parte comum.

2.6.3 Complementar

Fixado o universo Ω , o complementar de A é formado pelos elementos do universo que não pertencem a A :

$$A^c = \Omega - A.$$

O complementar depende do universo adotado.

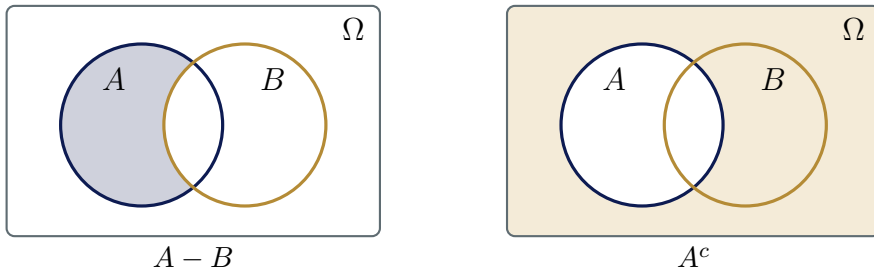


Figura 2.2: A diferença mantém somente a parte exclusiva de A ; o complementar ocupa o universo fora de A .

2.6.4 Exemplo

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{3\},$$

$$A - B = \{1, 2\}, \quad B - A = \{4, 5\}.$$

2.7 Álgebra de conjuntos

As operações obedecem a propriedades semelhantes às da aritmética.

Comutativas	$A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
Associativas	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivas	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$ e $A \cap A = A$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$

2.7.1 Leis de De Morgan

Negar que um elemento pertença à união significa dizer que ele não pertence a nenhum dos conjuntos. Negar que pertença à interseção significa dizer que falta em pelo menos um deles. Assim,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

e

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Essas identidades podem ser verificadas comparando as regiões nos diagramas de Venn ou analisando a pertinência de um elemento arbitrário.

2.8 Cardinalidade

A **cardinalidade** de um conjunto finito é seu número de elementos, indicado por $|A|$. Se $A = \{2, 4, 6, 8\}$, então $|A| = 4$.

Ao somar $|A|$ e $|B|$, os elementos da interseção são contados duas vezes. Por isso,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2.8.1 Inclusão-exclusão para três conjuntos

Com três conjuntos, subtraímos as interseções duas a duas e devolvemos a interseção tripla, que foi retirada em excesso:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

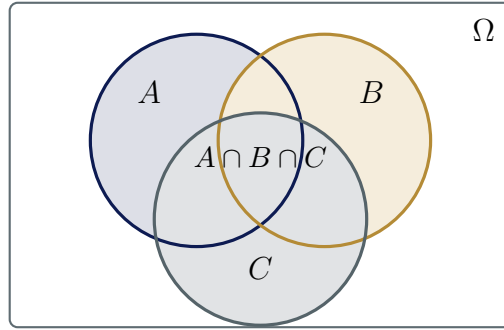


Figura 2.3: Em três conjuntos, a região central pertence às três interseções duas a duas.

2.9 Produto cartesiano

Dados conjuntos A e B , o produto cartesiano é o conjunto dos pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y\}$, então

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

Como a ordem do par importa, em geral $A \times B \neq B \times A$.

Se A e B são finitos,

$$\boxed{|A \times B| = |A| |B|}.$$

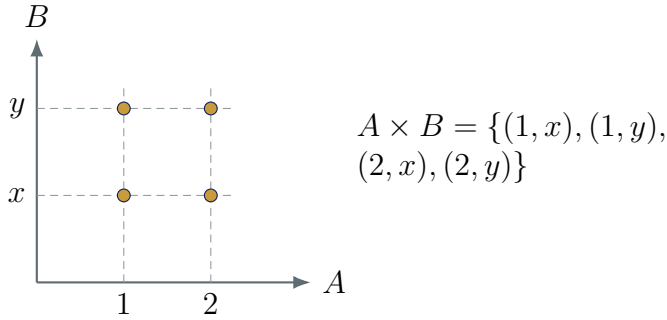


Figura 2.4: Cada ponto representa um par ordenado do produto cartesiano.

2.10 Intervalos reais

Intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$ descritos por desigualdades. Extremos fechados pertencem ao intervalo; extremos abertos não pertencem.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Também usamos $[a, b)$ e $(a, b]$.

Com infinito, o extremo é sempre aberto:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

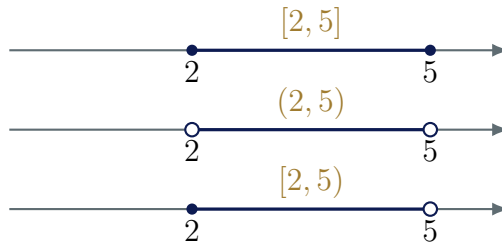


Figura 2.5: Ponto cheio indica extremo pertencente ao intervalo; ponto vazio indica extremo excluído.

2.11 Exemplos resolvidos

Exemplo 1: inclusão-exclusão

Se $|A| = 8$, $|B| = 5$ e $|A \cap B| = 2$, então

$$|A \cup B| = 8 + 5 - 2 = 11.$$

Exemplo 2: leitura de uma pesquisa

Em uma turma de 40 estudantes, 25 gostam de Matemática, 18 de Física e 10 de ambas. Logo,

$$|M \cup F| = 25 + 18 - 10 = 33.$$

Assim, $40 - 33 = 7$ estudantes não gostam de nenhuma das duas disciplinas.

Exemplo 3: intervalos

Se $I = [-1, 2)$ e $J = (0, 3]$, então

$$I \cap J = (0, 2) \quad \text{e} \quad I \cup J = [-1, 3].$$

2.12 Exercícios propostos

Fundamentos

1. Seja $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine se:
 - (a) $4 \in A$;
 - (b) $5 \in A$;
 - (c) $8 \notin A$.
2. Escreva todos os subconjuntos de $\{1, 2\}$.
3. Escreva $\{2, 4, 6, 8\}$ na forma de propriedade.
4. Sejam $C = \{a, e, i, o, u\}$ e D o conjunto das letras da palavra *MATEMÁTICA*. Verifique se $C \subseteq D$.
5. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas:
 - (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;
 - (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$;
 - (c) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, 1\}$.

Aplicação

6. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$.
7. Calcule $|\{a, b, c, d, e\}|$.
8. Em $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seja $A = \{1, 3, 5\}$. Determine A^c .
9. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, escreva $A \times B$.
10. Seja $I = [-1, 2)$ e $J = (0, 3]$. Descreva $I \cap J$ e $I \cup J$.

Domínio

11. Se $|A| = 15$, $|B| = 12$ e $|A \cap B| = 5$, determine $|A \cup B|$.
12. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$, escreva $A \times B$.
13. Se A e B são finitos e $A \subseteq B$, o que se pode afirmar sobre $|A|$ e $|B|$?
14. Mostre, por meio de um exemplo, que em geral $A - B \neq B - A$.
15. Prove que $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.

Coroação

16. Em uma turma de 40 estudantes, 25 gostam de Matemática, 18 de Física e 10 de ambas. Quantos não gostam de nenhuma das disciplinas?
17. Represente $(A \cup B)^c$ em um diagrama de Venn e compare a região com $A^c \cap B^c$.
18. Mostre que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ usando um diagrama de Venn e uma argumentação por pertinência.
19. Determine $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ e confirme sua cardinalidade pela fórmula 2^n .
20. Simplifique

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

utilizando as propriedades da álgebra de conjuntos.

21. Em um grupo de 100 estudantes, 60 estudam Inglês, 45 Espanhol e 30 Francês. Sabe-se que 25 estudam Inglês e Espanhol, 18 Inglês e Francês, 15 Espanhol e Francês e 10 os três idiomas. Quantos estudam pelo menos um desses idiomas? Quantos não estudam nenhum?
22. Verifique se $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, justificando sua resposta.

2.13 Resumo do capítulo

Neste capítulo estudamos:

- pertinência, representação e conjuntos finitos e infinitos;
- distinção entre elemento e subconjunto;
- inclusão, igualdade, vazio e conjunto das partes;
- união, interseção, diferenças e complementar;
- diagramas de Venn e propriedades algébricas;
- cardinalidade e inclusão-exclusão para dois e três conjuntos;
- produto cartesiano e intervalos reais.

A linguagem de conjuntos será usada continuamente ao longo do livro.

CAPÍTULO 3

Estruturas Numéricas

Motivação 3.1

Os números surgem da necessidade de representar diferentes situações do cotidiano: contar objetos, medir comprimentos, dividir quantidades e comparar grandezas. Porém, conforme os problemas se tornam mais complexos, os conjuntos numéricos também precisam se expandir.

Os **conjuntos numéricos** aparecem como camadas sucessivas: os naturais permitem contar, os inteiros representam perdas e ganhos, os racionais descrevem divisões e proporções, e os irracionais surgem para representar medidas que não podem ser escritas como frações. Juntos, eles formam a base da aritmética, da álgebra e da geometria.

Contexto histórico 3.1

A construção dos conjuntos numéricos aconteceu gradualmente ao longo da história. Povos antigos utilizavam inicialmente apenas números naturais para contagem. Com o desenvolvimento do comércio e da contabilidade, tornou-se necessário trabalhar com números negativos e frações.

Na Grécia Antiga, o estudo da geometria revelou um problema inesperado: certas medidas, como a diagonal de um quadrado de lado 1, não podiam ser expressas como razão entre inteiros. Esse fato levou ao surgimento dos números irracionais, abalando a visão pitagórica de que tudo poderia ser escrito como fração.

Com o tempo, os diferentes tipos de números foram organizados em estruturas cada vez mais amplas, formando os conjuntos numéricos utilizados atualmente na matemática moderna.

3.1 Introdução

Contar objetos, representar dívidas, dividir quantidades, medir diagonais e modelar grandezas contínuas. Em cada etapa da história, novos números surgiram porque os antigos já não bastavam.

Os conjuntos numéricos não são uma coleção aleatória de símbolos. Eles formam uma expansão natural de ideias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Neste capítulo, estudaremos como esses conjuntos se organizam, como se relacionam e por que são fundamentais para toda a matemática posterior.

3.2 Naturais

Os números naturais são usados principalmente para contagem e ordenação.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Em alguns contextos, considera-se:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Exemplos

- número de alunos em uma sala;
- páginas de um livro;
- posição em uma corrida.

Observação

Os naturais funcionam bem para contar, mas falham quando surge uma subtração como:

$$3 - 5$$

O resultado não pertence a $\mathbb{N}$.

3.3 Inteiros

Para lidar com faltas, perdas e posições abaixo de um referencial, surgem os inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Exemplos

- temperaturas negativas;
- saldo devedor;
- andares subterrâneos;
- deslocamentos para trás.

Exemplo

$$7 - 10 = -3$$

Agora o resultado faz sentido dentro de $\mathbb{Z}$.

3.4 Operações com inteiros

As operações básicas em $\mathbb{Z}$ seguem as mesmas ideias dos naturais, mas com um cuidado extra: os sinais.

Adição e subtração

A subtração pode ser vista como adição do oposto:

$$a - b = a + (-b).$$

Regras de sinais (multiplicação e divisão)

Para $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$:

$$(+)(+) = +; \quad (+)(-) = -; \quad (-)(+) = -; \quad (-)(-) = +.$$

Propriedades (em $\mathbb{Z}$)

Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

- **comutatividade:** $a + b = b + a$ e $ab = ba$;
- **associatividade:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(ab)c = a(bc)$;
- **distributividade:** $a(b + c) = ab + ac$;
- **neutros:** $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$;
- **oposto ou simétrico:** $a + (-a) = 0$.

Exemplos

$$\begin{aligned}(-7) + 12 &= 5, & 3 - (-8) &= 11, \\ (-4) \cdot (-5) &= 20, & (-18) \div 6 &= -3.\end{aligned}$$

Observação importante

Nem sempre a divisão de inteiros permanece em $\mathbb{Z}$: por exemplo, $1 \div 2 \notin \mathbb{Z}$. Isso motiva o surgimento dos racionais.

3.5 Racionais

Nem tudo é inteiro. Muitas situações envolvem partes de um todo.

Os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma:

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$$

O conjunto é denotado por:

$$\mathbb{Q}$$

Exemplos

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{7}{3}, \quad 4, \quad 0,25, \quad 1,333\dots$$

Todo inteiro é racional, pois:

$$5 = \frac{5}{1}$$

Decimais

Todo racional possui representação decimal:

- finita: $0,75$
- periódica: $0,333\dots$

3.6 Operações com racionais

Em $\mathbb{Q}$ as operações básicas ficam fechadas: se $r, s \in \mathbb{Q}$, então $r + s, r - s, rs$ e $\frac{r}{s}$ (com $s \neq 0$) também são racionais.

Simplificação

Sempre que possível, simplificamos uma fração dividindo numerador e denominador por um mesmo inteiro não nulo.

Soma e subtração de frações

Para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b, d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Multiplificação e divisão

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (c \neq 0).$$

Exemplos

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}, \quad \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} = -\frac{14}{5}.$$

Ordem de operações

Em expressões com parênteses e várias operações, seguimos a prioridade usual:

- parênteses;

3. ESTRUTURAS NUMÉRICAS

- potências e raízes;
- multiplicação e divisão;
- adição e subtração.

3.7 Irracionais

Alguns números não podem ser escritos como fração de inteiros. Esses números são chamados irracionais.

Exemplos

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \pi, \quad e$$

Comentário histórico

A descoberta de que $\sqrt{2}$ não era racional causou grande impacto na matemática antiga.

Se o lado de um quadrado mede 1, sua diagonal mede:

$$\sqrt{2}$$

Esse valor não pode ser escrito como fração entre inteiros.

3.8 Reais

Os números reais reúnem os racionais e os irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

onde I representa o conjunto dos irracionais.

Todo ponto da reta real corresponde a um número real.

3.9 Mapa dos Conjuntos Numéricos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Isso significa:

- todo natural é inteiro;
- todo inteiro é racional;
- todo racional é real.

Mas as recíprocas não valem em geral.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

3.10 Reta Real

A reta real organiza os números geometricamente.

- números maiores ficam à direita;
- números menores ficam à esquerda;
- zero separa positivos e negativos.

Exemplo

$$-4 < -1 < 0 < 2 < 7$$

Densidade

Entre dois números reais distintos sempre existe outro número real.

Entre 1 e 2 existe:

$$1,5$$

Entre 1 e 1,5 existe:

$$1,25$$

E assim indefinidamente.

3.11 Valor Absoluto ou Módulo

O valor absoluto (ou módulo) de um número real representa sua distância até o zero na reta real. Por isso, o módulo é sempre não negativo.

Indicamos o módulo de x por $|x|$.

Definição

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Isso significa que:

- o módulo de um número não negativo é o próprio número;
- o módulo de um número negativo é o seu oposto.

Exemplos

$$\begin{array}{lll} |5| = 5, & |-5| = 5, & |0| = 0, \\ \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}, & |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, & |+\sqrt{3}| = \sqrt{3}. \end{array}$$

Exemplo geométrico

Os números 4 e -4 estão à mesma distância da origem na reta real. Portanto,

$$|4| = |-4| = 4.$$

Na reta real, o módulo representa exatamente a distância entre um ponto e o zero.

Propriedades

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \geq 0,$$

$$|x| = 0 \iff x = 0,$$

$$|xy| = |x||y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0),$$

$$|x|^2 = x^2,$$

$$x \leq |x|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

Interpretação geométrica

O módulo também pode ser interpretado como a distância entre dois pontos da reta real.

A distância entre os números reais a e b é dada por

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Exemplo.

A distância entre 2 e -3 é

$$|2 - (-3)| = |5| = 5.$$

Logo, esses pontos estão separados por 5 unidades.

3.12 Ordem

Nos números reais existe uma relação natural de comparação:

$$7 > 3, \quad -2 < 5.$$

Cuidado clássico

Muitos estudantes erram ao comparar números negativos.

$$-10 < -2.$$

Embora $10 > 2$, o número -10 está mais à esquerda na reta real e, portanto, é menor.

Compatibilidade com operações

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Somando o mesmo número aos dois membros,

$$a < b \iff a + c < b + c.$$

(ii) Multiplicando ambos os membros por um número positivo,

$$c > 0 \implies (a < b \iff ac < bc).$$

(iii) Multiplicando ambos os membros por um número negativo,

$$c < 0 \implies (a < b \iff ac > bc).$$

3.13 Exercícios resolvidos

Resolvido 0

Calcule

$$-7 + 3 \cdot (-4) - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right).$$

Solução.

$$3 \cdot (-4) = -12, \quad \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -7 - 12 - \left(-\frac{1}{3} \right) &= -19 + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{57}{3} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{56}{3}. \end{aligned}$$

Resolvido 1

Para cada número abaixo, determine o menor conjunto numérico que o contém:

$$-3, \quad \frac{4}{5}, \quad \sqrt{7}, \quad 8, \quad 0,25.$$

Solução.

Número	Menor conjunto
-3	$\mathbb{Z}$
$\frac{4}{5}$	$\mathbb{Q}$
$\sqrt{7}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
8	$\mathbb{N}$
$0,25 = \frac{1}{4}$	$\mathbb{Q}$

Resolvido 2

Resolva

$$|x| = 6.$$

Solução.

A distância de x até a origem é 6.

$$x = 6 \quad \text{ou} \quad x = -6.$$

Resolvido 3

Resolva

$$|x - 2| = 4.$$

Solução.

$$x - 2 = 4 \quad \text{ou} \quad x - 2 = -4.$$

Logo,

$$x = 6 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Resolvido 4

Determine todos os inteiros x tais que

$$|x| < 4.$$

Solução.

$$-4 < x < 4.$$

Como x é inteiro,

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Resolvido 5

Compare os números -8 e -3 .

Solução.

Na reta real, -8 está à esquerda de -3 .

$$-8 < -3.$$

Resolvido 6

Coloque em ordem crescente

$$\sqrt{2}, \quad 1,4, \quad \frac{3}{2}, \quad -1.$$

Solução.

Sabemos que

$$\frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \approx 1,414.$$

Assim,

$$-1 < 1,4 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Resolvido 7

Resolva

$$|2x - 1| = 7.$$

Solução.

$$2x - 1 = 7 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -7.$$

Então,

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4,$$

e

$$2x = -6 \Rightarrow x = -3.$$

Logo,

$$S = \{-3, 4\}.$$

3.14 Exercícios propostos

Fundamentos

1. Julgue as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

- (a) $5 \in \mathbb{N}$.
- (b) $5 \in \mathbb{Z}$.
- (c) $-2 \in \mathbb{N}$.
- (d) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$.
- (e) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- (f) $1,333\ldots \in \mathbb{Q}$.
- (g) $\pi \in \mathbb{I}$.

2. Calcule (respeite a ordem de operações):

$$-8 + 5 \cdot (-3), \quad 12 - (-7), \quad \frac{3}{4} + \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{5}{6}\right) \div \left(-\frac{5}{9}\right).$$

3. Calcule:

3. ESTRUTURAS NUMÉRICAS

- (a) $|9|$;
- (b) $|-12|$;
- (c) $|0|$;
- (d) $|\frac{7}{2}|$.

4. Compare e justifique:

$$-6 \quad \text{e} \quad -1.$$

5. Escreva um exemplo de número que pertença a $\mathbb{Q}$ mas não pertença a $\mathbb{Z}$.

6. Escreva um exemplo de número que pertença a $\mathbb{R}$ mas não pertença a $\mathbb{Q}$.

Aplicação

7. Escreva três números racionais entre 2 e 3.

8. Calcule:

$$|-8|, \quad |15|, \quad \left|-\frac{7}{3}\right|, \quad |\sqrt{5}|.$$

9. Determine a distância entre os pontos:

$$4 \quad \text{e} \quad -6.$$

10. Determine a distância entre os pontos:

$$-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}.$$

11. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

$$|-5| = 5, \quad |3| = -3, \quad |-7| \geq 0.$$

Domínio

12. Ordene em ordem crescente:

$$\sqrt{2}, \quad 1,4, \quad \frac{3}{2}, \quad -1.$$

13. Determine todos os inteiros x tais que:

$$|x| < 4.$$

14. Determine a distância entre os números reais:

$$-7 \quad \text{e} \quad 2.$$

15. Seja

$$r = \frac{7}{50}.$$

Escreva r em forma decimal e diga se essa representação é finita ou periódica.

16. Mostre que todo inteiro é racional.

Coroação

17. Prove que:

$$|x| = |-x| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

18. Mostre que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

19. Explique geometricamente por que:

$$|a - b|$$

representa a distância entre os números reais a e b .

20. Prove que entre dois números racionais distintos sempre existe um número racional.

3.15 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- naturais;
- inteiros e suas operações;
- racionais e operações com frações;
- irracionais;
- reais;
- reta real;
- valor absoluto;
- ordem.

Os números são a matéria-prima da álgebra, da geometria, da análise e de praticamente toda a matemática.

CAPÍTULO 4

Exercícios da Parte I: Linguagem e Fundamentos

Este primeiro conjunto de exercícios reúne a linguagem que será usada no restante do livro. A atenção aos símbolos importa tanto quanto a conta: pertencer não é estar contido, uma frase não é automaticamente uma proposição e uma resposta numérica ainda precisa respeitar o conjunto ao qual pertence.

4.1 Exercícios propostos

Fundamentos

1. Julgue as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

- (a) $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A .
- (b) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.
- (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (e) $5 \in \mathbb{N}$.
- (f) $-2 \in \mathbb{N}$.
- (g) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$.
- (h) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- (i) $\pi \in \mathbb{R}$.

2. Escreva simbolicamente:

- (a) “Todo número natural é racional.”

4. EXERCÍCIOS DA PARTE I: LINGUAGEM E FUNDAMENTOS

- (b) “Existe um número irracional positivo.”
- (c) “Nenhum número inteiro negativo pertence aos naturais.”
3. Represente em notação de intervalo:
- (a) $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 5\}$.
- (b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x > 3\}$.
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq 2\}$.
4. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, determine $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$.
5. Calcule:
- (a) $|9|$;
- (b) $|-12|$;
- (c) $|0|$;
- (d) $|- \frac{7}{2}|$.
6. Compare e justifique os números -6 e -1 .
7. Escreva:
- (a) um número racional que não seja inteiro;
- (b) um número irracional;
- (c) um número real negativo.
8. Determine a distância entre os números 4 e -6 .

Aplicação

9. Se $A = [-1, 4)$ e $B = (2, 6]$, determine $A \cap B$ e $A \cup B$.
10. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$ e $B = [1, 5]$. Determine $A \cap B$ e $A \cup B$.
11. Numa turma:
- 18 alunos gostam de futebol;
 - 12 gostam de vôlei;

- 5 gostam de ambos.

Quantos gostam de pelo menos um dos esportes?

12. Em uma pesquisa, 60 pessoas responderam:

- 35 gostam de café;
- 28 gostam de chá;
- 12 gostam de ambos.

Quantas não gostam de nenhum dos dois?

13. Determine a distância entre -3 e 5 .

14. Determine todos os números reais cuja distância até o zero é igual a $\frac{5}{2}$.

15. Julgue as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

$$|-7| = 7, \quad |4| = -4, \quad |0| = 0.$$

16. Represente graficamente, na reta real, os conjuntos $A = (-\infty, 1]$ e $B = (-2, 4)$ e determine $A \cap B$.

17. Considere $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine o complementar de $A \cap B$ em relação a U .

Domínio

18. Ordene em ordem crescente: $\sqrt{2}$, $1,4$, $\frac{3}{2}$, -1 .

19. Mostre que, se $7 \mid a^2 + b^2$, onde a e b são números inteiros, então:
 $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

20. Dados $A = [-2, 4]$ e $B = (1, 6)$, determine $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$.

21. Represente na reta real os intervalos $[-3, 2)$ e $(1, +\infty)$.

22. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) $\sqrt{9} = 3$;

(b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$;

(c) $\pi \in \mathbb{I}$;

(d) $|-5| = -5$.

23. Explique por que $|a - b| = |b - a|$.

Coroação

24. (Desafio) Prove que, para quaisquer conjuntos A , B e C ,

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

25. (Desafio) Negue corretamente a afirmação:

“Todo número racional é inteiro.”

26. (Desafio) Explique geometricamente por que $|a - b|$ representa a distância entre os números reais a e b .

27. (Desafio) Considere $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$ e $B = [-1, 4]$.

28. Mostre que valem as seguintes propriedades:

(a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

PARTE II • ARITMÉTICA E NÚMEROS

CAPÍTULO 5

Divisibilidade e Números Inteiros

Motivação 5.1

Em diversas situações precisamos dividir quantidades de maneira exata: repartir objetos igualmente, organizar medidas ou simplificar frações. A **Divisibilidade** estuda justamente quando um número pode ser dividido por outro sem deixar resto.

Ao analisar múltiplos, divisores e fatores primos, conseguimos simplificar cálculos, identificar padrões e resolver problemas de forma mais eficiente. Esses conceitos também servem de base para temas importantes da matemática, como frações, equações e teoria dos números.

Contexto histórico 5.1

Desde as primeiras civilizações, ideias de divisibilidade já apareciam em atividades comerciais, medições e construções. Os matemáticos gregos transformaram essas observações práticas em teoria, especialmente com os trabalhos de Euclides.

Entre suas contribuições está o **Algoritmo de Euclides**, um método eficiente para calcular o máximo divisor comum entre dois números. Esse algoritmo, apresentado em *Os Elementos*, é um dos procedimentos matemáticos mais antigos ainda utilizados atualmente.

O estudo da divisibilidade também levou ao desenvolvimento do **Teorema Fundamental da Aritmética**, segundo o qual todo inteiro maior que 1 pode ser escrito de maneira única como produto de números primos. Mais tarde, matemáticos como Gauss ampliaram essas ideias e consolidaram a teoria dos números moderna.

5.1 Introdução

Ao observar números inteiros, percebemos padrões curiosos: alguns são pares, outros terminam em 5, alguns possuem muitos divisores, outros apenas dois. Essas regularidades formam o estudo da divisibilidade.

A ideia central é responder, de forma rápida e confiável, perguntas do tipo: “um número cabe exatamente dentro do outro?” e “quais fatores estão escondidos aqui?”. Essas perguntas aparecem quando simplificamos frações, contamos ciclos que se repetem, organizamos medidas e estudamos algoritmos.

Nosso objetivo será compreender padrões e relações entre números inteiros, desenvolvendo gradualmente uma visão mais estruturada da aritmética.

5.2 Múltiplos e Divisores

Sejam a e b inteiros, com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b quando existe um inteiro k tal que $b = ak$. Nesse caso, escrevemos $a \mid b$ (lê-se: “ a divide b ”).

Exemplos

$$12 = 3 \cdot 4 \implies 3 \mid 12.$$

Isso significa que 12 é múltiplo de 3. Da mesma forma, $35 = 5 \cdot 7$ implica $5 \mid 35$.

Já $4 \nmid 10$, pois não existe inteiro k tal que $10 = 4k$.

Múltiplos

Os múltiplos de 6 são 0, 6, 12, 18, 24, 30, ... e todo múltiplo de 6 pode ser escrito na forma $6k$, com k inteiro. Por exemplo, $24 = 6 \cdot 4$ e $30 = 6 \cdot 5$. Todo inteiro possui infinitos múltiplos.

Divisores

Os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6, 12. Cada um divide 12 exatamente.

Por exemplo, $12 \div 3 = 4$ e $12 \div 6 = 2$. Já $5 \nmid 12$, pois $12/5$ não é inteiro.

Relação importante

Quando $a \mid b$, também dizemos que b é múltiplo de a . Por exemplo, $4 \mid 20$ é equivalente a dizer que 20 é múltiplo de 4.

Padrões algébricos

A divisibilidade revela padrões interessantes. Por exemplo:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Como $n - 1$, n e $n + 1$ são três inteiros consecutivos, um deles é múltiplo de 3, e portanto $3 \mid (n^3 - n)$.

Além disso, entre três inteiros consecutivos sempre existe um número par e um múltiplo de 3. Portanto:

$$6 \mid (n^3 - n).$$

5.3 Critérios de Divisibilidade

Em muitos casos não precisamos efetuar a divisão para descobrir se um número é divisível por outro. Os **critérios de divisibilidade** são regras práticas baseadas na escrita decimal dos números.

Alguns critérios importantes são:

- **Por 2:** um número é divisível por 2 se termina em algarismo par.
- **Por 3:** um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é múltipla de 3.
- **Por 4:** um número é divisível por 4 se seus dois últimos algarismos formam um múltiplo de 4.
- **Por 5:** um número é divisível por 5 se termina em 0 ou 5.
- **Por 6:** um número é divisível por 6 se é divisível por 2 e por 3 simultaneamente.
- **Por 8:** um número é divisível por 8 se seus três últimos algarismos formam um múltiplo de 8.
- **Por 9:** um número é divisível por 9 se a soma dos algarismos é múltipla de 9.
- **Por 10:** um número é divisível por 10 se termina em 0.

Exemplo

- Verificar se 3726 é divisível por 6:

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

Como 3726 termina em 6, ele é divisível por 2. Além disso, $3+7+2+6 = 18$, e 18 é múltiplo de 3. Portanto, $6 \mid 3726$.

- Verificar se 2016 é divisível por 8:

Um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos formam um múltiplo de 8.

Os três últimos algarismos de 2016 formam $016 = 16$. Como $8 \mid 16$, temos $8 \mid 2016$.

5.4 Números Primos

Um número natural maior que 1 é chamado **primo** se possui exatamente dois divisores positivos: 1 e ele mesmo. Se possui mais divisores, é chamado **composto**.

Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... são números primos, enquanto $4 = 2 \cdot 2$ e $6 = 2 \cdot 3$ são compostos.

Os números primos são importantes porque funcionam como os “blocos fundamentais” da multiplicação.

Todo inteiro maior que 1 ou é primo, ou pode ser escrito como produto de números primos de maneira única. Esse resultado é conhecido como o **Teorema Fundamental da Aritmética**.

5.5 Fatoração Prima

Cada inteiro maior que 1 pode ser escrito como produto de primos. Por exemplo, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

A fatoração prima é útil para simplificar frações, calcular divisores, MDC e MMC.

5.6 Máximo Divisor Comum (MDC)

O **máximo divisor comum** de dois inteiros é o maior número que divide ambos.

Denotamos por $\text{mdc}(a, b)$. Por exemplo, $\text{mdc}(12, 18) = 6$.

Cálculo via fatoração

Fatorando, $12 = 2^2 \cdot 3$ e $18 = 2 \cdot 3^2$. Tomamos os fatores comuns com menor expoente (2^1 e 3^1), logo $\text{mdc}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$.

Quantidade de divisores

A fatoração prima também permite descobrir quantos divisores positivos um número possui.

Por exemplo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Para cada fator primo, o expoente pode variar de 0 até o expoente máximo presente na fatoração. Assim, 2^3 contribui com $3 + 1 = 4$ possibilidades, 3^2 contribui com $2 + 1 = 3$, e 5^1 contribui com $1 + 1 = 2$. Portanto, a quantidade total de divisores positivos é $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Observação

Em geral, a quantidade de divisores positivos de um número é par. Isso acontece porque os divisores costumam aparecer em pares $(d, \frac{n}{d})$. Por exemplo, os divisores de 12 podem ser agrupados como $(1, 12)$, $(2, 6)$ e $(3, 4)$.

Entretanto, quando o número é um quadrado perfeito, um divisor fica “sem par”. Por exemplo, $36 = 6^2$: nesse caso aparecem pares como $(1, 36)$, $(2, 18)$, $(3, 12)$, $(4, 9)$, mas 6 forma par consigo mesmo. Por isso, quadrados perfeitos possuem quantidade ímpar de divisores.

5.7 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **mínimo múltiplo comum** de dois inteiros é o menor número positivo múltiplo de ambos.

Denotamos por $\text{mmc}(a, b)$. Por exemplo, $\text{mmc}(4, 6) = 12$.

Cálculo via fatoração

Fatorando, $4 = 2^2$ e $6 = 2 \cdot 3$. Tomamos os fatores com maior expoente e obtemos $\text{mmc}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

5.8 Algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides é um método eficiente para calcular o MDC usando divisões sucessivas. Se

$$a = bq + r \quad \Rightarrow \quad \text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r),$$

então repetimos o processo até obter resto zero.

Exemplo

Calcular $\text{mdc}(84, 30)$.

Aplicando o algoritmo de Euclides:

$$84 = 30 \cdot 2 + 24,$$

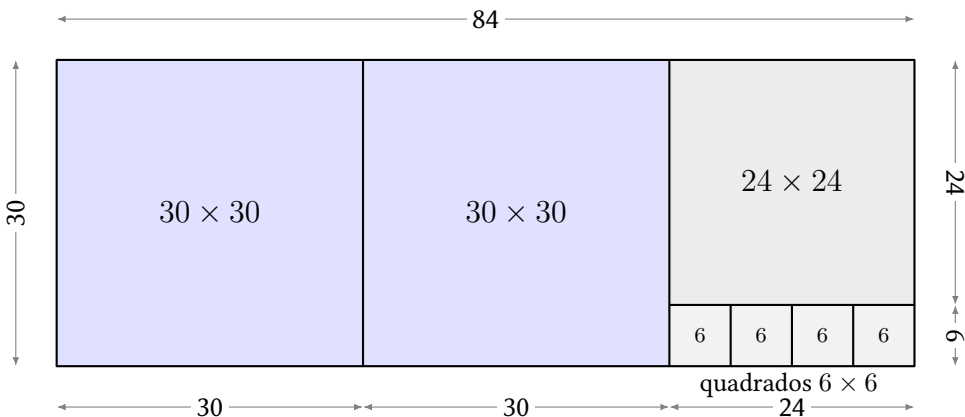
$$30 = 24 \cdot 1 + 6,$$

$$24 = 6 \cdot 4 + 0.$$

Como o último resto não nulo é 6, temos $\text{mdc}(84, 30) = 6$.

Uma interpretação geométrica

Imagine um retângulo de lados 84 e 30. Queremos preenchê-lo com quadrados iguais e do maior tamanho possível.



Primeiro retiramos dois quadrados 30×30 , restando um retângulo 24×30 . Em seguida, retiramos um quadrado 24×24 , sobrando um retângulo 24×6 . Por fim, esse retângulo pode ser dividido em quadrados 6×6 .

Portanto, $\text{mdc}(84, 30) = 6$.

Método do “chiqueiro”

O algoritmo de Euclides também pode ser organizado em um esquema visual bastante conhecido, chamado popularmente de “chiqueiro”.

Vamos calcular $\text{mdc}(84, 30)$.

As divisões sucessivas são:

$$84 = 30 \cdot 2 + 24,$$

$$30 = 24 \cdot 1 + 6,$$

$$24 = 6 \cdot 4 + 0.$$

Esse processo pode ser resumido no seguinte dispositivo:

	2	1	4
84	30	24	6
30	24	6	0

Os números da linha superior representam os quocientes obtidos em cada divisão sucessiva. Cada coluna reproduz uma etapa do algoritmo de Euclides.

O último resto não nulo é 6. Logo, $\text{mdc}(84, 30) = 6$.

5.9 Relação de Bézout

O algoritmo de Euclides revela um fato importante: o MDC de dois números pode ser escrito como combinação linear deles.

Por exemplo, $18 - 12 = 6$. Nesse caso, $6 = 1 \cdot 18 + (-1) \cdot 12$.

De modo geral, existem inteiros x e y tais que $ax + by = \text{mdc}(a, b)$. Esse resultado é chamado de **Relação de Bézout**. A expressão $ax + by$ é chamada de **combinação linear** de a e b .

Exemplo

Vamos escrever $\text{mdc}(84, 30)$ como combinação linear.

Pelo algoritmo de Euclides:

$$84 = 30 \cdot 2 + 24,$$

$$30 = 24 \cdot 1 + 6,$$

$$24 = 6 \cdot 4 + 0.$$

Logo, $\text{mdc}(84, 30) = 6$.

Agora voltamos nas equações:

$$6 = 30 - 24,$$

$$24 = 84 - 30 \cdot 2,$$

$$6 = 30 - (84 - 30 \cdot 2) = -84 + 3 \cdot 30.$$

Portanto, $84(-1) + 30(3) = 6$ e uma escolha é $x = -1, y = 3$.

5.10 Equações Diofantinas

Em muitas situações buscamos soluções inteiras para uma equação.

Por exemplo:

É possível formar R\$30 usando apenas notas de R\$6 e R\$9?

Se x representa a quantidade de notas de R\$6 e y a quantidade de notas de R\$9, então $6x + 9y = 30$. Equações desse tipo são chamadas de **equações diofantinas**.

Equação Diofantina Linear. Uma equação da forma $ax + by = c$ é chamada de equação diofantina linear quando buscamos soluções inteiras para x e y .

Nem toda equação desse tipo possui solução inteira. A condição fundamental é: a equação $ax + by = c$ possui solução inteira se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) \mid c$.

Quando a equação possui solução inteira, geralmente existem infinitas soluções.

Se (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax + by = c$, então todas as soluções inteiras podem ser escritas na forma

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t,$$

onde $d = \text{mdc}(a, b)$ e $t \in \mathbb{Z}$. Assim, as soluções formam um conjunto infinito parametrizado por um inteiro t .

Exemplo 1

Resolver $6x + 9y = 30$.

Primeiro calculamos $\text{mdc}(6, 9) = 3$. Como $3 \mid 30$, a equação possui solução inteira. Dividindo a equação por 3, obtemos $2x + 3y = 10$.

Agora procuramos valores inteiros que satisfaçam essa igualdade. Escolhendo, por exemplo, $y = 2$, temos:

$$2x + 3(2) = 10 \Rightarrow 2x + 6 = 10 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Logo, $(x, y) = (2, 2)$ é uma solução inteira.

Essa não é a única solução: por exemplo, $(x, y) = (5, 0)$ também satisfaz $6x + 9y = 30$.

No exemplo $6x + 9y = 30$, temos $d = \text{mdc}(6, 9) = 3$. Como uma solução particular é $(x_0, y_0) = (2, 2)$, todas as soluções inteiras podem ser escritas na forma

$$x = 2 + 3t, \quad y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $S = \{(2 + 3t, 2 - 2t) \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 2

Resolver $4x + 6y = 7$.

Calculando o MDC, $\text{mdc}(4, 6) = 2$. Mas $2 \nmid 7$ e, portanto, a equação não possui solução inteira.

Conexão com Bézout

A relação de Bézout e as equações diofantinas estão profundamente ligadas.

A igualdade $ax + by = \text{mdc}(a, b)$ mostra exatamente quando combinações lineares podem produzir certos números.

Por isso, o algoritmo de Euclides não serve apenas para calcular MDC: ele também ajuda a resolver equações inteiras.

5.11 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Quantos divisores positivos possui 360?

Solução:

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, o número de divisores é $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$.

Resolvido 2

Calcule $\text{mmc}(84, 126)$.

Solução:

Usaremos a relação

$$\text{mmc}(a, b) \cdot \text{mdc}(a, b) = ab.$$

De $126 = 84 + 42$ e $84 = 42 \cdot 2$ vem $\text{mdc}(84, 126) = 42$. Assim,

$$\text{mmc}(84, 126) = \frac{84 \cdot 126}{42} = 252.$$

Resolvido 3

Simplifique $\frac{252}{198}$.

Solução:

Pelo algoritmo de Euclides,

$$252 = 198 + 54,$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36,$$

$$54 = 36 + 18,$$

$$36 = 18 \cdot 2,$$

$$\text{logo } \text{mdc}(252, 198) = 18 \text{ e, portanto, } \frac{252}{198} = \frac{14}{11}.$$

Resolvido 4

Mostre que $6 \mid (n^3 - n)$.

Solução:

Fatorando e aplicando a diferença de quadrados,

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Os números $n - 1$, n e $n + 1$ são três inteiros consecutivos, e entre três inteiros consecutivos:

- um deles é múltiplo de 3;
- pelo menos um deles é par.

Logo, o produto $n(n - 1)(n + 1)$ é divisível por $2 \cdot 3 = 6$ e, portanto, $6 \mid (n^3 - n)$.

Resolvido 5

Encontre inteiros x e y tais que $84x + 30y = 6$.

Solução:

Da relação de Bézout, $6 = (-1) \cdot 84 + 3 \cdot 30$. Logo, $x = -1$ e $y = 3$.

5.12 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Verifique se: $3 \mid 45$, $5 \nmid 72$, $7 \mid 84$.
2. Liste os divisores positivos de 24 e 36.
3. Escreva os cinco primeiros múltiplos positivos de 8 e 15.
4. Use os critérios de divisibilidade para decidir se 3726 é divisível por 2, 3, 6 e 9.
5. Classifique os números abaixo em primos ou compostos: 49, 51, 97.

Aplicação

6. Fatore em números primos: 360, 1001, 2310.
7. Calcule $\text{mdc}(168, 210)$ e $\text{mmc}(168, 210)$.
8. Determine $\text{mdc}(252, 198)$ e $\text{mmc}(252, 198)$.
9. Determine o menor inteiro positivo divisível por 12, 18 e 30.
10. Quantos divisores positivos possui o número 360?
11. Liste todos os divisores positivos de 72.
12. Use o algoritmo de Euclides para calcular $\text{mdc}(1001, 143)$.

Domínio

13. Mostre que $6 \mid n(n+1)(n+2)$, para todo inteiro n .
14. Mostre que $3 \mid (n^3 - n)$, para todo inteiro n .
15. Determine inteiros x e y tais que $18x + 30y = 6$.

16. Escreva $\text{mdc}(45, 18)$ como combinação linear de 45 e 18.

17. Resolva a equação diofantina $4x + 6y = 18$.

Coroação

18. Encontre uma solução inteira de $84x + 30y = 6$.

19. Determine o conjunto de todas as soluções inteiras da equação $6x + 9y = 30$.

20. Mostre que a equação $14x + 21y = 5$ não possui solução inteira.

21. Determine todos os inteiros n tais que $\text{mdc}(n, 12) = 4$.

22. Mostre que, se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$ e $a \mid (b - c)$.

23. Se p é primo e $p \mid ab$, prove que $p \mid a$ ou $p \mid b$.

5.13 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- múltiplos e divisores;
- critérios de divisibilidade;
- números primos;
- fatoração prima;
- MDC e MMC;
- algoritmo de Euclides;
- relação de Bézout;
- equações diofantinas.

Os conceitos de divisibilidade aparecem em diversos problemas matemáticos e servem de base para temas mais avançados, como álgebra, teoria dos números e criptografia.

CAPÍTULO 6

Aritmética Modular

Motivação 6.1

Diversas situações do cotidiano funcionam em ciclos: relógios retornam ao zero após 24 horas, dias da semana se repetem e calendários seguem padrões periódicos. Em todos esses casos, o mais importante não é o número completo, mas o **resto** obtido em determinada divisão.

A **Aritmética Modular** formaliza essa ideia ao estudar números que possuem o mesmo resto quando divididos por um valor fixo. Essa linguagem simplifica cálculos, reduz expressões grandes e permite resolver problemas envolvendo periodicidade, divisibilidade e padrões numéricos.

Contexto histórico 6.1

Embora ideias ligadas a ciclos existam desde a Antiguidade, a formulação moderna da aritmética modular foi desenvolvida por Carl Friedrich Gauss no início do século XIX.

Gauss introduziu o conceito de **congruência**, mostrando que números podem ser considerados equivalentes quando deixam o mesmo resto em uma divisão. Essa abordagem transformou a teoria dos números e abriu caminho para métodos mais eficientes de cálculo e demonstração.

Atualmente, a aritmética modular possui aplicações importantes em computação, criptografia, códigos de segurança e algoritmos digitais, além de desempenhar papel central na matemática pura.

6.1 Introdução

Ao dividir números inteiros, muitas vezes o valor mais importante não é o quociente, mas o **resto**. Horários em relógios, calendários, padrões de último

algarismo, ciclos repetitivos e diversos problemas olímpicos dependem dessa ideia.

A aritmética modular estuda números quando observados “por ciclos”. Em vez de perguntar quanto vale exatamente um número, perguntamos: qual resto ele deixa ao ser dividido por outro?

Essa mudança de perspectiva produz uma matemática elegante, poderosa e surpreendentemente útil.

Neste capítulo estudaremos congruências, classes residuais, restos, propriedades, relógio modular e aplicações iniciais.

6.2 Congruências

Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 0$.

Dizemos que a é congruente a b módulo m quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por m .

Escrevemos:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Exemplo

$$17 \equiv 5 \pmod{12}$$

$$23 \equiv 3 \pmod{10}$$

pois

$$17 = 12 + 5$$

e ambos deixam resto 5 na divisão por 12.

No segundo caso, ambos terminam em 3.

Forma equivalente

$$a \equiv b \pmod{m}$$

se, e somente se,

$$m \mid (a - b)$$

Ou seja, a diferença $a - b$ é múltipla de m .

6.3 Classes Residuais

Muitos números diferentes podem representar a mesma classe módulo m .

No módulo 5:

$$0, 5, 10, 15, 20, \dots$$

todos pertencem à mesma classe residual de 0.

Da mesma forma:

$$1, 6, 11, 16, 21, \dots$$

pertencem à classe residual de 1.

Assim, módulo 5, existem apenas cinco classes:

$$[0], \quad [1], \quad [2], \quad [3], \quad [4]$$

Ideia central

Quando trabalhamos módulo 5, todos os inteiros se reduzem a apenas cinco possibilidades.

6.4 Restos

Todo número inteiro dividido por m deixa resto entre

$$0 \text{ e } m - 1.$$

Exemplos

Dividindo por 7, os restos possíveis são

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Dividindo por 2, os restos possíveis são

$$0, 1.$$

Por isso todo inteiro é par ou ímpar.

Exemplo

$$58 \div 7$$

Temos:

$$58 = 7 \cdot 8 + 2$$

Logo:

$$58 \equiv 2 \pmod{7}$$

6.5 Propriedades

Se

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{e} \quad c \equiv d \pmod{m}$$

então:

Soma

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

Subtração

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

Multiplicação

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

Potências

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

Exemplo

Como

$$14 \equiv 2 \pmod{12}$$

então

$$14^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{12}$$

6.6 Relógio Modular

Relógios funcionam naturalmente módulo 12 (ou módulo 24).

Exemplo

Se agora são 9 horas, daqui 17 horas serão:

$$9 + 17 = 26$$

No relógio de 12 horas:

$$26 \equiv 2 \pmod{12}$$

Resposta: 2 horas.

Outro exemplo

Se agora são 11 horas, daqui 8 horas:

$$11 + 8 = 19$$

$$19 \equiv 7 \pmod{12}$$

Logo, serão 7 horas.

6.7 Último Algoritmo

O último algoritmo de um número depende do resto módulo 10.

Exemplo

Encontrar o último algarismo de

$$7^{100}.$$

Potências de 7 módulo 10:

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

O ciclo se repete a cada 4 termos.

Como

$$100 \div 4$$

deixa resto 0, usamos o quarto termo do ciclo:

$$7^{100} \equiv 1 \pmod{10}$$

Último algarismo:

$$1$$

6.8 Aplicações Olímpicas Básicas

A aritmética modular aparece com frequência em problemas olímpicos porque permite estudar padrões de divisibilidade, restos e propriedades dos números de maneira elegante.

Em vez de trabalhar diretamente com números enormes, analisamos apenas os restos das divisões.

As congruências também ajudam a estudar:

- divisibilidade;
- paridade;
- quadrados perfeitos;
- padrões em potências;
- propriedades de números primos.

Exemplo 1

Mostre que todo número da forma

$$3n + 2$$

não é divisível por 3.

Solução

Ao dividir um número por 3, os únicos restos possíveis são

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

O termo

$$3n$$

é múltiplo de 3. Portanto,

$$3n \equiv 0 \pmod{3}.$$

Assim,

$$3n + 2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Como o resto nunca é 0, concluímos que

$$3 \nmid (3n + 2).$$

Exemplo 2

Mostre que o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Solução

Todo número ímpar pode ser escrito na forma

$$2k + 1.$$

Calculando o quadrado:

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Colocando $4k$ em evidência:

$$(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1.$$

Logo,

$$(2k + 1)^2$$

tem a forma

$$2m + 1,$$

isto é, é ímpar.

Também podemos escrever usando congruências:

$$2k + 1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Então,

$$(2k + 1)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Portanto, o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Exemplo 3

Mostre que o quadrado de qualquer inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

Solução

Todo inteiro é da forma $2k$ ou $2k + 1$.

- Se $n = 2k$, então $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e, logo, $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
- Se $n = 2k + 1$, então $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ e, assim, $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Portanto, os únicos restos possíveis de um quadrado perfeito módulo 4 são 0 e 1.

Esse tipo de argumento é muito usado para mostrar que certas equações não possuem solução inteira.

Por exemplo, como 2 não aparece entre os restos possíveis módulo 4, concluímos que não existe inteiro n tal que $n^2 \equiv 2 \pmod{4}$.

Pequeno Teorema de Fermat

As congruências também permitem estudar potências muito grandes e propriedades profundas dos números primos.

Um dos resultados mais importantes da teoria dos números é o **Pequeno Teorema de Fermat**: se p é primo e a não é múltiplo de p , então

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Por exemplo, como 7 é primo, temos $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$. De fato, $2^6 = 64$ e $64 = 7 \cdot 9 + 1$.

6.9 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Calcule o resto de:

$$73$$

na divisão por 5.

Solução

$$73 = 5 \cdot 14 + 3$$

Logo:

$$73 \equiv 3 \pmod{5}$$

Resolvido 2

Se:

$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

determine o resto de $x + 5$ por 7.

Solução

$$x + 5 \equiv 4 + 5 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

Resolvido 3

Determine o último algarismo de:

$$3^8$$

Ciclo módulo 10:

$$3, 9, 7, 1$$

Como 8 é múltiplo de 4, usamos o quarto termo.

Resposta:

$$1$$

6.10 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Determine os restos das divisões:

$$25 \text{ por } 4, \quad 81 \text{ por } 7, \quad 100 \text{ por } 9.$$

2. Escreva na forma de congruência:

$$32 \text{ deixa resto } 2 \text{ na divisão por } 5.$$

3. Verifique se a congruência abaixo é verdadeira:

$$19 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Aplicação

4. Se:

$$x \equiv 3 \pmod{8},$$

determine:

(a) $x + 2$

(b) $2x$

(c) x^2

módulo 8.

5. Se agora são 7 horas, daqui a 20 horas serão que horas?

6. Determine o último algarismo de:

$$2^{15}.$$

Domínio

7. Mostre que a soma de dois números pares é par.
8. Mostre que todo múltiplo de 9 possui soma dos algarismos múltipla de 9.
9. Determine o resto da divisão de:

$$5^{37}$$

por:

$$3.$$

Coroação

10. Prove que não existe inteiro n tal que:

$$n^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

6.11 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- congruências;
- classes residuais;
- restos;
- propriedades;
- relógio modular;
- aplicações olímpicas básicas.

A aritmética modular permite estudar padrões de divisibilidade e restos de maneira mais organizada. Muitas ideias importantes da teoria dos números surgem naturalmente a partir dessas propriedades.

CAPÍTULO 7

Frações e Razões

Motivação 7.1

Nem todas as situações podem ser representadas apenas com números inteiros. Ao dividir alimentos, medir distâncias ou comparar quantidades, surge a necessidade de representar partes de um todo. As **frações** permitem descrever essas relações de maneira precisa e operacional. Além de indicar divisões, frações também representam razões e proporções entre grandezas. Com elas, podemos comparar quantidades, simplificar medidas e resolver problemas envolvendo partilhas e escalas.

Contexto histórico 7.1

As frações acompanham a humanidade desde as primeiras civilizações. Os egípcios, por exemplo, utilizavam representações próprias para descrever partes de quantidades em cálculos comerciais e medições agrícolas.

Com o desenvolvimento da matemática, a notação $\frac{p}{q}$ tornou-se predominante por sua simplicidade e eficiência. Essa escrita permite interpretar a fração tanto como divisão quanto como relação entre duas quantidades. Ao longo do tempo, o estudo das frações se tornou essencial para áreas como geometria, álgebra, física e engenharia, pois grande parte das medidas do mundo real envolve relações não inteiras.

7.1 Introdução

Nem toda quantidade aparece em números inteiros. Metade de uma pizza, três quartos de um tanque, “2 litros para cada 5 pessoas”, mapas reduzidos e receitas culinárias mostram que muitas situações do cotidiano dependem de **partes e comparações**.

Frações e razões também aparecem quando queremos ser **precisos** sem usar aproximações: comparar $\frac{5}{8}$ com $\frac{2}{3}$, decidir quanto falta para completar 1 unidade, ajustar uma receita para mais pessoas, ou entender uma escala de mapa sem confundir unidades.

Neste capítulo estudaremos frações equivalentes e simplificação, operações e comparação, além de razões, escalas e proporções (incluindo a regra de três). A meta é aprender tanto o **procedimento** quanto o **raciocínio** por trás dele, para evitar erros comuns como “somar denominadores” ou misturar unidades em escalas.

7.2 Frações

Uma fração tem a forma:

$$\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

onde:

- a é o numerador;
- b é o denominador.

Ela pode representar:

- parte de um todo;
- divisão;
- razão entre quantidades.

Quando a fração representa uma parte de um todo, o denominador informa em quantas partes **iguais** a unidade foi dividida, e o numerador informa quantas dessas partes foram consideradas. Assim, em $\frac{3}{4}$, dividimos a unidade em quatro partes iguais e tomamos três.

Essa palavra — iguais — é importante. Não basta separar uma pizza em quatro pedaços de tamanhos diferentes e escolher três deles: nesse caso, a escrita $\frac{3}{4}$ não descreve corretamente a quantidade escolhida.

Exemplos

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{10}{3}$$

Exemplos mais desafiadores (interpretação)

- $-\frac{3}{5}$ representa um número negativo; o sinal vale para a fração inteira.
- $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ (fração imprópria pode ser escrita como número misto).
- $\frac{0}{9} = 0$, mas $\frac{9}{0}$ **não existe** (não se divide por 0).

7.3 Frações Equivalentes

Frações diferentes podem representar a mesma quantidade.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100}$$

Isso ocorre quando multiplicamos ou dividimos numerador e denominador pelo mesmo número não nulo.

A quantidade não muda porque estamos apenas mudando a maneira de nomear as partes. Por exemplo, se cada metade é dividida novamente em duas partes iguais, duas metades passam a ser quatro quartos. Por isso,

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}.$$

Em uma fração irredutível, numerador e denominador não possuem divisor comum maior que 1. Essa é a forma mais simples de apresentar uma fração.

Exemplo

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Simplificação

Consiste em dividir numerador e denominador por um divisor comum.

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

pois dividimos ambos por 6.

Atenção

Não é permitido simplificar apenas o numerador ou apenas o denominador. Por exemplo, transformar $\frac{12}{18}$ em $\frac{2}{18}$ altera a quantidade. A simplificação só preserva a fração quando a mesma divisão é feita nos dois termos.

7.4 Operações

Adição e Subtração

É necessário igualar denominadores.

O motivo é simples: só podemos somar partes do mesmo tamanho. Não faz sentido somar diretamente “metades” com “terços”; antes, reescrevemos as duas frações usando uma mesma divisão da unidade.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Multiplicação

Multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Divisão

Multiplica-se pela inversa da segunda fração.

A segunda fração precisa ser diferente de zero, pois não existe divisão por zero. A inversa de $\frac{c}{d}$ é $\frac{d}{c}$: ao multiplicá-las, obtemos 1. É por isso que dividir por uma fração equivale a multiplicar por sua inversa.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Erro comum

Em geral,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}.$$

Por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, e não $\frac{2}{5}$. A regra de somar numeradores e denominadores não vale para adição de frações.

7.5 Comparação

Frações podem ser comparadas de várias formas.

Mesmo denominador

Maior numerador implica maior fração.

$$\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$$

Mesmo numerador

Menor denominador implica maior fração.

$$\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$$

Produto cruzado

Para comparar:

$$\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d}$$

com $b, d > 0$, comparamos:

$$ad \quad \text{e} \quad bc$$

A condição $b, d > 0$ evita trocar o sentido da desigualdade. No estudo de frações como partes de um todo, os denominadores já são positivos; por isso, o produto cruzado pode ser usado diretamente.

Exemplo

Compare:

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{5}{7}$$

Calculamos:

$$3 \cdot 7 = 21, \quad 4 \cdot 5 = 20$$

Como $21 > 20$:

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$$

7.6 Razões

Uma razão compara duas quantidades por divisão.

$$\text{razão entre } a \text{ e } b = \frac{a}{b}$$

A ordem faz diferença. A razão meninas:meninos não é, em geral, igual à razão meninos:meninas. Além disso, quando houver unidades, elas precisam ser compatíveis: antes de comparar metros e centímetros, por exemplo, convertamos uma delas para a mesma unidade da outra.

Exemplos

Se em uma turma há 18 meninas e 12 meninos:

Razão meninas : meninos

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Ou seja:

$$3 : 2$$

Interpretação

Para cada 3 meninas, há 2 meninos.

Observe também a diferença entre razão e fração do total. Nesse exemplo, a razão meninas:meninos é $3 : 2$, mas a fração da turma formada por meninas é $\frac{18}{18+12} = \frac{3}{5}$.

7.7 Escalas

Escala representam reduções ou ampliações proporcionais.

Em uma escala $1 : n$, cada unidade medida no desenho corresponde a n unidades na realidade. A conversão só funciona diretamente se a unidade for mantida dos dois lados da razão.

Exemplo

Escala:

$$1 : 100000$$

Significa que:

$$1 \text{ cm no mapa} = 100000 \text{ cm reais}$$

Como:

$$100000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$$

então:

$$1 \text{ cm no mapa} = 1 \text{ km real}$$

Exemplo Aplicado

Em um mapa, duas cidades distam 4,5 cm. Na escala $1 : 100000$, a distância real é:

$$4,5 \text{ km}$$

7.8 Proporções

Quando duas razões possuem o mesmo valor, dizemos que elas formam uma proporção.

7. FRAÇÕES E RAZÕES

Em outras palavras, uma proporção é uma igualdade entre razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Os números a e d são chamados de **extremos**, enquanto b e c são chamados de **meios** da proporção.

Propriedade Fundamental

A principal propriedade das proporções afirma que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Ou seja, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Essa propriedade não é uma regra para decorar sem sentido: ela vem do fato de que podemos multiplicar os dois lados de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por bd , desde que b e d não sejam zero. Assim, os denominadores desaparecem e sobra $ad = bc$.

Exemplo

Verifique se $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

Calculando os produtos, $2 \cdot 9 = 18$ e $3 \cdot 6 = 18$. Como os resultados são iguais, concluímos que $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

Propriedades das proporções

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então diversas outras igualdades também podem ser obtidas.

Propriedade 1

Somando numerador e denominador em cada razão:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Exemplo

Se $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, então

$$\frac{2+3}{3} = \frac{6+9}{9},$$

ou seja, $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$.

Propriedade 2

Subtraindo numerador e denominador:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Exemplo

Se $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$, então

$$\frac{5-7}{7} = \frac{10-14}{14},$$

ou seja, $\frac{-2}{7} = \frac{-4}{14}$.

Propriedade 3

Invertendo as razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Exemplo

Se $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$, então $\frac{9}{4} = \frac{27}{12}$.

Propriedade 4

Somando os antecedentes e os consequentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

Exemplo

Se $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, então $\frac{2+3}{4+6} = \frac{5}{10}$. Como $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, a proporção permanece válida.

Regra de três simples

As proporções aparecem frequentemente em problemas do cotidiano.

Antes de montar uma regra de três, vale perguntar: quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma razão? Nesse caso, as grandezas são **diretamente proporcionais**. Quando uma aumenta e a outra diminui na mesma razão, elas são **inversamente proporcionais**. Essa leitura vem antes da conta.

Exemplo

Se 4 cadernos custam 28 reais, quanto custam 7 cadernos?

Como o preço é proporcional à quantidade de cadernos, podemos escrever:

$$\frac{4}{7} = \frac{28}{x}.$$

Aplicando a propriedade fundamental, $4x = 7 \cdot 28$, ou seja, $4x = 196$.
Dividindo por 4, obtemos $x = 49$.

Portanto, 7 cadernos custam 49 reais.

No exemplo, a conclusão depende de uma condição: todos os cadernos têm o mesmo preço. Se houvesse desconto por quantidade ou produtos de preços diferentes, a proporção poderia deixar de valer.

Regra de três composta

Na regra de três composta, relacionamos três ou mais grandezas ao mesmo tempo.

O ponto central continua sendo o mesmo: manter fixo aquilo que não mudou. No exemplo abaixo, cada máquina trabalha no mesmo ritmo e todos os dias têm a mesma duração. Sem essas condições, não podemos afirmar automaticamente que a produção é proporcional ao número de dias e de máquinas.

O procedimento consiste em analisar quais grandezas são:

- diretamente proporcionais;
- inversamente proporcionais.

Exemplo

Uma fábrica produz 120 peças em 4 dias utilizando 6 máquinas.

Quantas peças serão produzidas em 10 dias utilizando 8 máquinas, mantendo o mesmo ritmo de produção?

Solução

Vamos organizar as grandezas:

Peças	Dias	Máquinas
120	4	6
x	10	8

A quantidade de peças é:

- diretamente proporcional ao número de dias;
- diretamente proporcional ao número de máquinas.

Portanto,

$$\frac{x}{120} = \frac{10}{4} \cdot \frac{8}{6}.$$

Simplificando,

$$\frac{x}{120} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3},$$

de onde $3x = 1200$ e $x = 400$. Logo, serão produzidas 400 peças.

7.9 O que observar antes de calcular

Em problemas com frações, razões ou proporções, algumas perguntas evitam que a conta comece no lugar errado:

1. Identifique o que a fração representa: parte de um todo, divisão ou comparação?
2. Confira se as unidades são compatíveis.
3. Se houver adição ou subtração, procure um denominador comum.
4. Se houver uma regra de três, diga primeiro se a relação é direta ou inversa e quais condições permanecem fixas.
5. Ao final, verifique se o resultado faz sentido no contexto. Uma parte pode ser maior que uma unidade quando o problema admite mais de um inteiro, mas não pode ultrapassar o total que ela deveria representar. Em um mapa reduzido, a distância real deve ser maior que a distância desenhada.

7.10 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Simplifique ao máximo $\frac{84}{126}$.

Solução

Calculamos o MDC de 84 e 126, que é 42. Então

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}.$$

Resolvido 2

Calcule e simplifique $\frac{18}{35} \cdot \frac{21}{24}$.

Solução

Simplificamos cruzado:

$$\frac{18}{35} \cdot \frac{21}{24} = \frac{\cancel{18}}{35} \cdot \frac{21}{\cancel{24}} = \frac{3}{35} \cdot \frac{21}{4}.$$

E ainda 21 e 35 têm fator 7:

$$\frac{3}{35} \cdot \frac{21}{4} = \frac{3}{\cancel{35}} \cdot \frac{\cancel{21}}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}.$$

Resolvido 3

Compare $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{3}$.

Solução

Usamos produto cruzado: $5 \cdot 3 = 15$ e $8 \cdot 2 = 16$. Como $15 < 16$, então $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$.

Resolvido 4

Uma receita usa $\frac{3}{4}$ de xícara de açúcar para $\frac{2}{3}$ de xícara de leite. Mantendo a proporção, quanto açúcar é necessário para 2 xícaras de leite?

Solução

A razão açúcar/leite deve permanecer constante:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2}.$$

Calculamos a razão:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}.$$

Então $\frac{x}{2} = \frac{9}{8}$, e portanto $x = 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Resolvido 5

Em um mapa na escala 1 : 25000, a distância entre duas cidades é 6,8 cm. Qual é a distância real em km?

Solução

6,8 cm no mapa corresponde a $6,8 \cdot 25000 = 170000$ cm reais. Como $100000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$, temos $170000 \text{ cm} = 1,7 \text{ km}$.

Resolvido 6

Uma fábrica produz 240 peças em 5 dias utilizando 8 máquinas.

Quantas peças serão produzidas em 12 dias utilizando 10 máquinas, mantendo o mesmo ritmo de produção?

Solução

Organizamos as grandezas:

Peças	Dias	Máquinas
240	5	8
x	12	10

A quantidade de peças é:

- diretamente proporcional ao número de dias;
- diretamente proporcional ao número de máquinas.

Portanto,

$$\frac{x}{240} = \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{4} = 3,$$

de onde $x = 240 \cdot 3 = 720$. Portanto, serão produzidas 720 peças.

7.11 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Encontre três frações equivalentes a $\frac{2}{5}$.

2. Simplifique:

$$\frac{60}{150}, \quad \frac{84}{126}, \quad \frac{144}{180}.$$

3. Calcule e simplifique:

(a) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$

(b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

(c) $\frac{9}{14} \cdot \frac{21}{27}$

(d) $\frac{5}{9} \div \frac{10}{21}$

4. Compare, sem transformar em decimal:

$$\frac{11}{15} \quad \text{e} \quad \frac{7}{10}.$$

7. FRAÇÕES E RAZÕES

5. Em uma sala há 18 meninas e 12 meninos.
- (a) Escreva a razão meninas:meninos na forma simplificada.
- (b) Determine a fração da turma formada por meninas.

Aplicação

6. Resolva:

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4}.$$

7. Resolva:

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{y}.$$

8. Uma receita utiliza $\frac{2}{3}$ de xícara de óleo para $\frac{5}{4}$ de xícara de leite.
Quanto óleo será necessário para 5 xícaras de leite?
9. Em uma escala 1 : 20000, uma rua mede 6,4 cm no mapa.
Qual é a distância real em metros?
10. Um carro percorre 180 km com 15 litros.
Quantos quilômetros percorrerá com 22 litros?
11. Uma fábrica produz 240 peças em 5 dias utilizando 8 máquinas.
Quantas peças serão produzidas em 12 dias utilizando 10 máquinas?

Domínio

12. Divida 120 em duas partes diretamente proporcionais a 3 e 5.
13. Divida 84 em duas partes na razão 3 : 4.
14. Determine uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que:
- $$\frac{5}{8} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}.$$
15. Em uma turma, a razão entre aprovados e reprovados é 7 : 3.
Sabendo que existem 40 alunos, determine quantos foram aprovados.
16. Um reservatório é abastecido por 4 bombas em 15 horas.
Em quanto tempo 10 bombas iguais abastecerão o mesmo reservatório?

Coroação

17. Um produto sofreu aumento de $\frac{1}{5}$ e depois desconto de $\frac{1}{6}$.
O preço final ficou maior, menor ou igual ao inicial? Justifique.
18. A soma de dois números é 96.
Sabendo que estão na razão 5 : 7, determine esses números.
19. Três números estão na razão 2 : 3 : 5.
Sabendo que a soma é 200, determine os números.
20. Em um mapa, duas cidades estão separadas por 8,5 cm.
Na realidade, a distância entre elas é 170 km.
Determine a escala do mapa.

7.12 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- frações equivalentes;
- operações;
- comparação;
- razões;
- escalas;
- proporções.

CAPÍTULO 8

Porcentagem e Juros

Motivação 8.1

Em situações do cotidiano, frequentemente precisamos comparar aumentos, descontos e variações de valores. A **porcentagem** surge como uma forma padronizada de representar partes de um todo, facilitando comparações em preços, estatísticas, impostos e pesquisas.

Quando essas variações acontecem ao longo do tempo, entram os conceitos de **juros** e crescimento financeiro. Nesses casos, os valores não mudam apenas por soma, mas principalmente por multiplicação sucessiva, tornando os fatores percentuais fundamentais para compreender investimentos, financiamentos e inflação.

Contexto histórico 8.1

O uso de porcentagens se desenvolveu junto ao comércio e à necessidade de padronizar cálculos envolvendo taxas e proporções. A ideia de trabalhar “por cento” simplificou negociações, tributos e análises econômicas em diferentes culturas.

Já os juros acompanham a humanidade desde as civilizações antigas, especialmente em empréstimos agrícolas e comerciais. Com o avanço da álgebra e da matemática financeira, tornou-se possível modelar crescimentos e descontos por meio de fórmulas gerais.

Atualmente, porcentagens e juros aparecem em praticamente todas as áreas ligadas a finanças, economia e análise de dados, sendo ferramentas essenciais para interpretar variações e tomar decisões quantitativas.

8.1 Introdução

Porcentagens aparecem em promoções, investimentos, inflação, impostos, pesquisas, estatísticas e crescimento populacional. Saber interpretar taxas percentuais evita erros comuns e permite tomar decisões mais inteligentes.

A palavra “porcentagem” significa literalmente “por cento”, isto é, por cada 100 partes. Mas, em matemática financeira, o mais importante é pensar em **fatores multiplicativos**: um aumento de $p\%$ transforma um valor V em $V(1 + p/100)$.

Neste capítulo estudaremos porcentagem direta e reversa, variações sucessivas (aumentos e descontos), juros simples e juros compostos. Também vamos discutir **taxas equivalentes** (mensal/anual) e a ideia de **taxa efetiva**, que é o que realmente acontece quando as porcentagens se acumulam.

8.2 Fator multiplicativo e variação percentual

Se um valor inicial é V e ocorre uma variação de $p\%$:

- aumento de $p\%$: $V \mapsto V(1 + \frac{p}{100})$;
- desconto de $p\%$: $V \mapsto V(1 - \frac{p}{100})$.

Essa forma é a mais segura para lidar com variações sucessivas: em vez de “somar porcentagens”, multiplicamos fatores.

Exemplos

- Aumento de 15% em 200: $200 \cdot 1,15 = 230$.
- Aumentar 20% e depois descontar 20% não volta ao original, pois $1,20 \cdot 0,80 = 0,96$.
- Para voltar ao preço original após um desconto de 30%, não basta aumentar 30%: é preciso multiplicar por $\frac{1}{0,70}$, isto é, um aumento de aproximadamente 42,86%.

8.3 Porcentagem Direta

Calcular uma porcentagem de um valor significa multiplicar esse valor pela taxa correspondente.

Exemplos

$$20\% = \frac{20}{100} = 0,20 \text{ e } 35\% = 0,35.$$

Exemplo

Calcule 15% de 200: $0,15 \cdot 200 = 30$. Logo, 15% de 200 é 30.

Outro exemplo

8% de 750 é $0,08 \cdot 750 = 60$.

8.4 Porcentagem Reversa

Aqui conhecemos o valor final e desejamos descobrir o valor original.

Exemplo

Após aumento de 20%, um produto passou a custar R\$ 240. Se x era o preço inicial, então $1,20x = 240$ e, portanto, $x = 200$.

Exemplo

Após desconto de 25%, um produto passou a custar R\$ 150. Assim, $0,75x = 150$ e $x = 200$.

8.5 Acréscimos Sucessivos

Aumentos consecutivos não se somam diretamente. Eles se multiplicam.

Exemplo

Um preço sofre aumento de 10% e depois de 20%. O fator total é $1,10 \cdot 1,20 = 1,32$. Logo, o aumento total foi de 32% (e não 30%).

Outro exemplo

Aumento de 50% seguido de aumento de 10%: $1,50 \cdot 1,10 = 1,65$. Aumento total: 65%.

8.6 Descontos

Descontos funcionam multiplicando pelo fator restante.

Exemplo

Desconto de 30%: resta 70%, isto é, multiplicamos por 0,70. Se o produto custa 500, então $500 \cdot 0,70 = 350$.

Descontos Sucessivos

Descontos de 20% e depois 10%: fator total $0,80 \cdot 0,90 = 0,72$. Logo, o desconto equivalente é $1 - 0,72 = 0,28$, isto é, 28%.

8.7 Juros Simples

Nos juros simples, os juros incidem sempre sobre o capital inicial.

Isso significa que o valor acrescentado em cada período permanece constante.

Fórmula

Os juros simples são calculados por:

$$J = C \cdot i \cdot t,$$

onde:

- J = juros;
- C = capital inicial;
- i = taxa de juros;
- t = tempo.

O montante total é dado por:

$$M = C + J.$$

Substituindo a expressão dos juros em $M = C + J$, obtemos $M = C + Cit$ e, colocando C em evidência,

$$M = C(1 + it).$$

Exemplo

Um capital de 1000 reais é aplicado a 2% ao mês durante 5 meses. Assim, $C = 1000$, $i = 0,02$ e $t = 5$, então $J = 1000 \cdot 0,02 \cdot 5 = 100$ e $M = 1000 + 100 = 1100$.

Relação com função linear

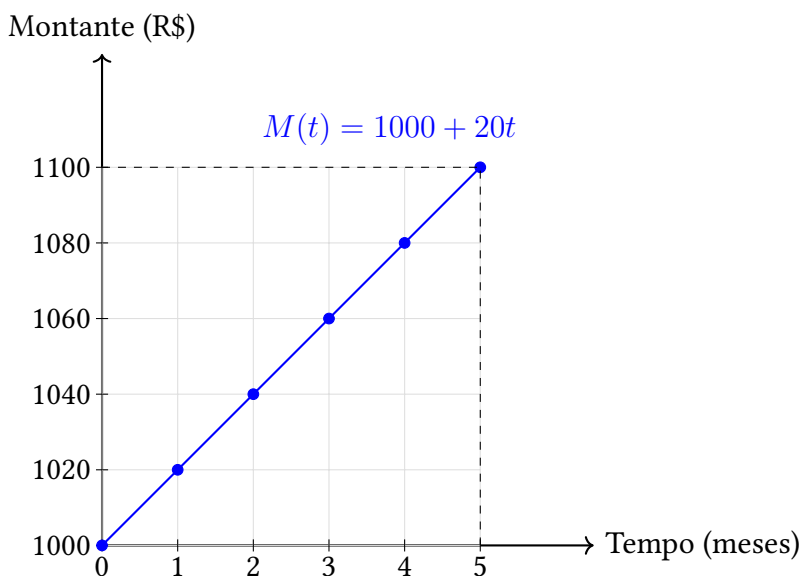
Observe que, nos juros simples, $M = C + Cit$. Fixando o capital C e a taxa i , obtemos a função $M(t) = C + Cit$.

Essa expressão tem a forma $f(x) = ax + b$, isto é, representa uma função linear (ou afim). No exemplo anterior, $M(t) = 1000 + 20t$, então o montante cresce 20 reais por mês.

Interpretação gráfica

No exemplo anterior, a função do montante é $M(t) = 1000 + 20t$.

Isso representa uma reta crescente, pois o montante aumenta 20 reais a cada mês.



No gráfico:

- o valor inicial 1000 corresponde ao instante $t = 0$;
- a cada mês, o montante aumenta exatamente 20 reais;

- por isso, os pontos do gráfico crescem de maneira uniforme;
- o comportamento linear produz uma reta.

8.8 Juros Compostos

Nos juros compostos, os juros de cada período são incorporados ao capital anterior.

Isso significa que, a cada etapa, os juros passam a render novos juros.

Diferentemente dos juros simples, o crescimento deixa de ser constante e passa a acelerar ao longo do tempo.

Esse é o regime utilizado na maior parte dos investimentos, financiamentos e aplicações bancárias.

Fórmula

O montante nos juros compostos é dado por:

$$M = C(1 + i)^t,$$

onde:

- M = montante;
- C = capital inicial;
- i = taxa de juros;
- t = tempo.

Exemplo

Um capital de 1000 reais é aplicado a 10% ao período durante 3 períodos. Assim, $C = 1000$, $i = 0,10$ e $t = 3$, então

$$M = 1000(1 + 0,10)^3 = 1000(1,1)^3 = 1000 \cdot 1,331 = 1331.$$

Relação com função exponencial

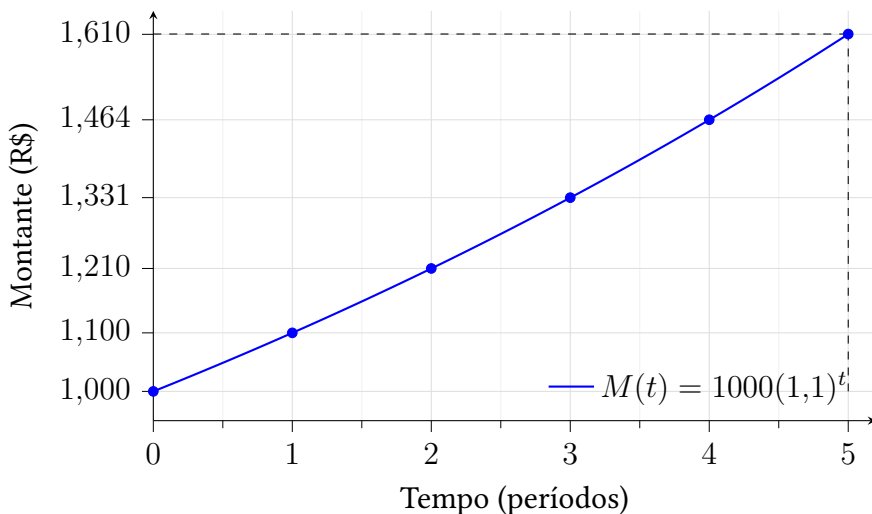
Observe a expressão $M(t) = 1000(1,1)^t$. A variável t aparece no expoente.

Isso caracteriza uma função exponencial.

Enquanto nos juros simples o crescimento ocorre de maneira constante, nos juros compostos o aumento se torna cada vez maior.

Interpretação gráfica

No exemplo anterior, a função do montante é $M(t) = 1000(1,1)^t$.



No gráfico:

- o valor inicial é 1000;
- o crescimento aumenta a cada período;
- os intervalos verticais deixam de ser constantes;
- a curva se torna cada vez mais inclinada;
- esse comportamento caracteriza uma função exponencial.

8.9 Crescimento Percentual

Muitos fenômenos do cotidiano apresentam crescimento percentual sucessivo, como:

- população;
- inflação;
- investimentos;
- vendas;

- audiência;
- crescimento de empresas.

Em situações assim, o crescimento costuma seguir um modelo exponencial.

Exemplo

Uma cidade possui população inicial de 50000 habitantes e cresce 4% ao ano. Após 2 anos, a população será

$$50000(1,04)^2 = 50000 \cdot 1,0816 = 54080.$$

Portanto, após dois anos, a cidade terá 54080 habitantes.

Modelo exponencial

De maneira geral, um crescimento percentual pode ser modelado por:

$$P(t) = P_0(1 + i)^t,$$

onde:

- P_0 representa o valor inicial;
- i representa a taxa de crescimento;
- t representa o tempo.

Esse modelo aparece em diversas áreas da matemática, economia, biologia e física.

8.10 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Um produto custa R\$ 250. Ele sofre desconto de 12% e, depois, desconto adicional de 8%.

1. Qual é o preço final?
2. Qual foi o desconto total em porcentagem?

8. PORCENTAGEM E JUROS

Solução

O fator do primeiro desconto é 0,88 e o do segundo é 0,92. Então:

$$V_f = 250 \cdot 0,88 \cdot 0,92 = 250 \cdot 0,8096 = 202,40.$$

O fator total foi 0,8096, então o desconto total é $1 - 0,8096 = 0,1904$, isto é, 19,04%.

Resolvido 2

Após um aumento de 20%, o preço passou a ser R\$ 240. Qual era o preço inicial?

Solução

Se x é o preço inicial, então $1,20x = 240$, logo:

$$x = \frac{240}{1,20} = 200.$$

Resolvido 3

Uma loja anuncia: “Desconto de 30% e, no caixa, mais 10%”. Isso equivale a um único desconto de quantos por cento?

Solução

Fator total: $0,70 \cdot 0,90 = 0,63$. Logo, o desconto único equivalente é $1 - 0,63 = 0,37$, isto é, 37%.

Resolvido 4

Um capital de R\$ 2000 rende juros simples de 3% ao mês durante 4 meses. Calcule juros e montante.

Solução

$$J = 2000 \cdot 0,03 \cdot 4 = 240, \quad M = C + J = 2240.$$

Resolvido 5

Um capital de R\$ 5000 é aplicado a 5% ao mês, em juros compostos, por 2 meses. Calcule o montante.

Solução

$$M = 5000(1,05)^2 = 5000 \cdot 1,1025 = 5512,50.$$

Resolvido 6

Qual é a taxa mensal i que transforma R\$ 1000 em R\$ 1210 em 2 meses, em juros compostos?

Solução

$$1000(1 + i)^2 = 1210$$

$$(1 + i)^2 = 1,21$$

$$1 + i = \sqrt{1,21} = 1,1$$

$$i = 0,1 = 10\%.$$

8.11 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule:

(a) 12% de 400

(b) 35% de 800

(c) 7% de 1500

2. Após aumento de 25%, um produto custa 500. Qual era o preço inicial?

3. Após desconto de 10%, um item custa 270. Qual era o valor inicial?

Aplicação

4. Dois aumentos sucessivos de 10%. Qual aumento total?

5. Dois descontos sucessivos de 20%. Qual desconto total?

6. Um capital de 3000 rende juros simples de 4% ao mês por 6 meses. Determine o montante.

7. Um preço sofreu desconto de 30% e depois aumento de 30%. Qual foi a variação total?

Domínio

8. Calcule o montante em juros compostos: $C = 4000$, $i = 8\%$, $t = 3$.
9. Uma população de 80000 cresce 3% ao ano. Qual será após 5 anos?
10. Um preço sofre aumento de 30% e depois desconto de 10%. Qual a variação total?
11. Uma aplicação rende 2% ao mês. Encontre a taxa anual efetiva aproximada (isto é, o crescimento em 12 meses).

Coroação

12. Uma mercadoria é vendida com **lucro de 25% sobre o custo**. Qual é a **porcentagem de lucro sobre o preço de venda**?
13. Um valor sofre três variações sucessivas: +10%, depois -20%, e depois +5%. Qual é a variação total?
14. Qual taxa mensal i faz uma aplicação dobrar de valor em 18 meses (juros compostos)? Deixe a resposta em forma de expressão envolvendo raiz.

8.12 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- porcentagem direta e reversa;
- acréscimos sucessivos;
- descontos;
- juros simples;
- juros compostos;
- crescimento percentual.

Entender porcentagens e juros é essencial para matemática financeira e para decisões inteligentes no cotidiano.

CAPÍTULO 9

Exercícios da Parte II: Aritmética e Números

Na aritmética, quase sempre é possível conferir se uma resposta faz sentido. Uma fração pode ser estimada, um resto pode ser testado e uma porcentagem pode ser comparada ao valor inicial. Use essas verificações: elas revelam erros antes que se escondam nas contas seguintes.

9.1 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Efetue:

(a) $2^3 \cdot 2^5$;

(b) $\frac{3^7}{3^4}$;

(c) $(5^2)^3$;

(d) 10^{-2} ;

(e) $\frac{2^6 \cdot 4}{8}$.

2. Escreva em notação científica: (a) 0,00056; (b) 7 900 000; (c) $3,2 \times 10^5$ em forma decimal.

3. Calcule o MDC e o MMC de 84 e 126.

4. Escreva a fatoração em primos de: (a) 360; (b) 462.

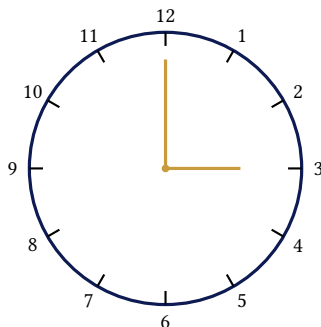
5. Determine se 2310 é divisível por 2, 3, 5, 9 e 11.

9. EXERCÍCIOS DA PARTE II: ARITMÉTICA E NÚMEROS

6. Calcule: (a) 35% de 240; (b) 12% de 750.
7. Converta: (a) 0,375 em fração; (b) $\frac{7}{20}$ em decimal.

Aplicação

8. Um produto que custava R\$ 80 recebeu desconto de 15%. Qual é o preço final?
9. Um produto de R\$ 120 teve aumento de 20% e, depois, desconto de 20% sobre o novo preço. O preço final volta a ser R\$ 120? Justifique.
10. Uma população aumenta 2% ao ano. Se hoje é 50 mil, qual será aproximadamente após 3 anos?
11. Uma caixa tem 24 lâmpadas. $\frac{5}{8}$ delas são LED. Quantas lâmpadas LED há na caixa?
12. Uma receita pede 300 g de farinha para 12 cookies. Quantos gramas de farinha são necessários para 20 cookies, mantendo a proporção?
13. (Com desenho) Um relógio marca 3h. Qual é o ângulo entre os ponteiros?



14. Um tanque tem 40 L de água. Retira-se 15% e depois adiciona-se 6 L. Quantos litros ficam no tanque?

Domínio

15. Um número n deixa resto 3 na divisão por 7. Escreva n na forma $n = 7q + r$ e determine r .

16. Determine o menor número natural que é múltiplo de 12 e 18 ao mesmo tempo.
17. Determine o menor número natural maior que 1 que, ao ser dividido por 6 e por 8, deixa resto 1 em ambos os casos.
18. Uma fração positiva e própria, na forma irredutível, tem denominador 45. Quantas possibilidades existem para o numerador?

Coroação

19. (Desafio) Um capital de R\$ 1000 é aplicado a juros compostos de 1% ao mês. Escreva uma expressão para o montante após n meses.
20. (Desafio) Encontre todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que 2^n termine com o algarismo 6.
21. (Desafio) Um número tem 3 algarismos. Ao inverter os algarismos, obtém-se um número 198 maior. Determine o número, sabendo que a soma dos algarismos é 12.

PARTE III • EXPRESSÕES E ÁLGEBRA

CAPÍTULO 10

Potências e Radicais

Motivação 10.1

Em muitos problemas matemáticos surgem multiplicações repetidas: dobrar quantidades, calcular áreas, estudar crescimento populacional ou representar grandezas extremamente grandes ou pequenas. As **potências** aparecem como uma forma compacta e eficiente de organizar essas repetições.

Já os **radicais** surgem quando fazemos o caminho inverso. Em vez de calcular o resultado de uma potência, buscamos descobrir qual número produz determinado valor quando elevado a certa potência.

Essas ideias aparecem em geometria, álgebra, física, química, computação e em diversos modelos matemáticos ligados a crescimento, escalas e proporções.

Contexto histórico 10.1

A notação de potência foi desenvolvida gradualmente para simplificar multiplicações sucessivas. Com o avanço da álgebra, percebeu-se que essa escrita revelava padrões importantes e permitia formular propriedades gerais para cálculos e transformações.

Os radicais ganharam destaque principalmente na geometria grega. Ao estudar quadrados e triângulos, os matemáticos descobriram comprimentos que não podiam ser escritos como frações, como a diagonal de um quadrado de lado 1. Essa descoberta levou ao reconhecimento dos números irracionais e ampliou profundamente a compreensão dos números reais.

Hoje, potências e radicais são ferramentas fundamentais em praticamente toda a matemática.

10.1 Introdução

Potências aparecem naturalmente quando repetimos multiplicações com o mesmo fator.

Por exemplo, 2^5 representa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Além de simplificar a escrita, essa notação revela regularidades importantes. Ao manipular potências, percebemos padrões que permitem transformar cálculos extensos em expressões muito mais simples.

Os radicais representam a operação inversa. Por exemplo, $\sqrt{25} = 5$ pois $5^2 = 25$; da mesma forma, $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$.

Neste capítulo estudaremos as propriedades fundamentais das potências, os significados dos expoentes negativos e fracionários, a relação entre potências e radicais, técnicas de simplificação e processos de racionalização.

10.2 Potências e propriedades

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Por exemplo, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Ao trabalhar com potências, certas regularidades aparecem naturalmente.

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 2^7. \end{aligned}$$

Como os fatores possuem a mesma base, basta contar quantas vezes ela aparece.

Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0.$$

Por exemplo,

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2.$$

Os fatores iguais se cancelam naturalmente.

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Por exemplo,

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^8.$$

Potência de um produto

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Por exemplo, $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$.

Potência de um quociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Por exemplo, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

Expoente zero

Para $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Essa definição preserva os padrões anteriores, pois $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Mas $\frac{a^n}{a^n} = 1$ e, logo, $a^0 = 1$.

Observação

As propriedades das potências funcionam naturalmente em multiplicações e divisões. Entretanto, elas não podem ser aplicadas diretamente em somas.

Por exemplo, $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$: basta observar que $(1+1)^2 = 4$, enquanto $1^2 + 1^2 = 2$.

10.3 Expoentes negativos

Para $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Essa definição mantém coerentes as propriedades anteriores. Por exemplo, $a^2 \cdot a^{-2} = a^0 = 1$.

Assim, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Exemplos

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Notação científica

Escrever um número em notação científica significa colocá-lo na forma $a \cdot 10^k$, onde $1 \leq a < 10$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Por exemplo, $0,00045 = 4,5 \cdot 10^{-4}$ e $7200000 = 7,2 \cdot 10^6$.

10.4 Expoentes fracionários

A escrita

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

permite interpretar radicais como potências e mantém válidas as propriedades anteriores.

Exemplos

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4,$$

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Bases negativas

Quando o índice da raiz é ímpar, valores negativos podem aparecer naturalmente.

Por exemplo, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Já raízes de índice par não possuem resultado real para radicandos negativos.

Misturando expoentes

$$32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^2} = \frac{1}{4}.$$

10.5 Radicais e simplificação

Os radicais representam operações inversas das potências.

Por exemplo, $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

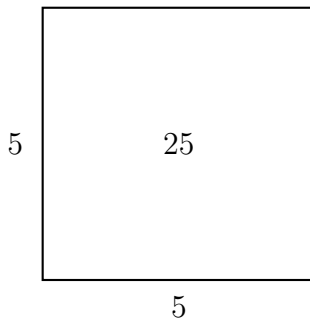
Uma interpretação geométrica

A raiz quadrada também possui uma interpretação geométrica simples.

Considere um quadrado de área 25.

Qual deve ser a medida de seu lado?

Como $5^2 = 25$, o lado mede $\sqrt{25} = 5$.



Assim, a raiz quadrada pode ser interpretada como o comprimento do lado de um quadrado de área conhecida.

Nem sempre esse comprimento é inteiro. Em alguns casos, surgem números como $\sqrt{2}$, que não podem ser escritos como frações entre inteiros.

Propriedades

Para $a, b \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b > 0.$$

Simplificação de radicais

A simplificação consiste em retirar do radical fatores que formam potências perfeitas.

Por exemplo, $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2$.

Logo,

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Da mesma forma, $54 = 2 \cdot 3^3$ e, assim, $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$.

Cuidado importante

Para números reais, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Por exemplo, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

A raiz quadrada principal é sempre não negativa.

10.6 Racionalização

Racionalizar significa eliminar radicais do denominador.

Denominador com uma raiz

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Denominador com duas parcelas

Quando o denominador possui duas parcelas envolvendo raiz, multiplicamos pela expressão semelhante com sinal trocado. Por exemplo:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}.$$

No denominador, $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, e assim $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Outro exemplo

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}.$$

10.7 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Simplifique $\frac{2^7 \cdot 2^{-3}}{2^2}$.

Solução

$$\frac{2^{7-3}}{2^2} = 2^2 = 4.$$

Resolvido 2

Escreva $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ sem expoente negativo.

Solução

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Resolvido 3

Calcule $81^{\frac{3}{4}}$.

Solução

Como $81 = 3^4$, temos $81^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$.

Resolvido 4

Simplifique $\sqrt{200} - \sqrt{50}$.

Solução

Como $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ e $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, temos $\sqrt{200} - \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Resolvido 5

Racionalize $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Solução

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

10.8 Exercícios Propostos**Fundamentos**

1. Calcule:

(a) $2^5 \cdot 2^3$

(b) $\frac{7^6}{7^2}$

(c) $(5^2)^3$

2. Simplifique:

(a) 10^{-3}

(b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

(c) $3^{-2} \cdot 3^5$

3. Calcule:

(a) $25^{\frac{1}{2}}$

(b) $64^{\frac{1}{3}}$

(c) $16^{\frac{3}{4}}$

Aplicação

4. Simplifique:

$$\frac{a^3 \cdot a^{-5}}{a^{-2}}, \quad a \neq 0.$$

5. Simplifique:

$$\sqrt{48}, \quad \sqrt{180}, \quad \sqrt[3]{192}.$$

6. Racionalize:

$$\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \frac{3}{2 + \sqrt{5}}.$$

Domínio

7. Mostre que:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}}, \quad a > 0.$$

Depois calcule:

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}.$$

8. Simplifique:

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} + \sqrt{12}.$$

9. Racionalize:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

Coroação

10. Encontre x tal que:

$$8^x = \frac{1}{16}.$$

11. Simplifique completamente:

$$\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \right).$$

12. Mostre que:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}, \quad a > b > 0.$$

10.9 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- propriedades das potências;

10. POTÊNCIAS E RADICAIS

- expoentes negativos;
- expoentes fracionários;
- radicais;
- simplificação de radicais;
- racionalização.

Potências e radicais aparecem em diversos problemas matemáticos ligados a crescimento, medidas, escalas e transformações algébricas.

CAPÍTULO 11

Produtos Notáveis e Fatoração

Motivação 11.1

À medida que a álgebra evolui, as expressões se tornam maiores e mais complexas. Expandir produtos repetidamente pode gerar muitos termos, tornando os cálculos longos e difíceis de organizar. Os **produtos notáveis** surgem justamente para reconhecer padrões frequentes e simplificar essas manipulações.

Já a **fatoração** faz o processo inverso: em vez de expandir expressões, buscamos decomô-las em fatores mais simples. Isso é fundamental para resolver equações, identificar raízes e compreender melhor a estrutura dos polinômios.

Contexto histórico 11.1

Desde os primeiros estudos algébricos, matemáticos perceberam que certas expansões apareciam repetidamente. Expressões como o quadrado da soma ou a diferença de quadrados passaram a ser tratadas como padrões gerais, facilitando cálculos e demonstrações.

Com o avanço da álgebra simbólica, a fatoração ganhou importância porque permitia transformar expressões complexas em produtos mais simples. Essa ideia se mostrou especialmente útil na resolução de equações polinomiais.

Ao longo do tempo, produtos notáveis e fatoração tornaram-se ferramentas centrais da álgebra, aparecendo em praticamente todos os níveis da matemática e em aplicações envolvendo modelagem, física e engenharia.

11.1 Introdução

Ao expandir multiplicações algébricas repetidamente, certos padrões aparecem com tanta frequência que vale a pena memorizá-los. Em vez de desenvolver cada produto termo a termo todas as vezes, podemos reconhecer a estrutura e escrever o resultado de forma mais rápida e organizada.

Um padrão que aparece o tempo todo

Quando vemos o quadrado de um binômio,

$$(a + b)^2,$$

estamos, na verdade, multiplicando o binômio por ele mesmo:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Fazendo a distributiva (passo a passo):

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Expressões como essa aparecem tantas vezes que recebem fórmulas próprias: são os **produtos notáveis**.

O ponto principal não é decorar uma sequência de símbolos, mas enxergar de onde vêm os termos. No quadrado de um binômio, aparecem os quadrados das duas parcelas e duas vezes o produto entre elas. Essa leitura ajuda a reconstruir a fórmula quando a memória falhar.

A ideia inversa: fatorar

A **fatoração** faz o caminho de volta. Em vez de expandir, tentamos reconhecer qual parêntese gerou a expressão. Por exemplo,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Em resumo:

- **Expandir** transforma produto em soma (desenvolver parênteses).
- **Fatorar** transforma soma em produto (colocar parênteses de volta).

Produtos notáveis e fatoração aparecem o tempo todo na simplificação de expressões, na resolução de equações e em frações algébricas. Ao longo deste capítulo, vamos treinar exatamente isso: **reconhecer padrões** e escolher a **técnica de fatoração** mais adequada em cada caso.

Tabela de reconhecimento

O que você vê	Padrão provável	Ação
Todos os termos têm um fator em comum	Fator comum	Colocar em evidência
Dois termos com sinal “-”	Diferença de quadrados $a^2 - b^2$	$(a - b)(a + b)$
Três termos; 1ª e 3ª são quadrados	TQP $a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^2$
Trinômio com x^2 (coeficiente 1)	$x^2 + bx + c$	achar m, n com $m+n = b$ e $mn = c$
Trinômio com ax^2 ($a \neq 1$)	$ax^2 + bx + c$	quebrar bx e agrupar
Quatro termos	Agrupamento	formar 2 pares com o mesmo binômio

Quatro modelos recorrentes

- **Modelo A (simplificar):**

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4, \quad (x \neq 4).$$

- **Modelo B (resolver):**

$$x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

- **Modelo C (em duas etapas):**

$$6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2).$$

- **Modelo D (agrupamento):**

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 4x - 4 &= (x^3 - x^2) + (4x - 4) \\ &= x^2(x - 1) + 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + 4). \end{aligned}$$

11.2 Produtos notáveis

Os produtos notáveis abaixo são os mais usados porque aparecem como **padrões** tanto na expansão quanto na fatoração.

1) Quadrado da soma e quadrado da diferença

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Exemplos

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4.$$

2) Produto da soma pela diferença (diferença de quadrados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exemplos

$$(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 - 25.$$

$$(3a + 1)(3a - 1) = 9a^2 - 1.$$

3) Soma e diferença de cubos

Além dos cubos dos binômios, há duas fatorações importantes:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Os sinais do segundo fator merecem atenção: na soma de cubos, o termo do meio é negativo; na diferença de cubos, ele é positivo.

Exemplos

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

$$27y^3 - 1 = (3y)^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1).$$

4) Cubo da soma e cubo da diferença

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Exemplos

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

$$(2y - 1)^3 = 8y^3 - 12y^2 + 6y - 1.$$

5) Produto de binômios com termo comum

Quando há um termo repetido (o mesmo “começo”), é útil pensar em fator comum:

$$(a + b)(a + c) = a^2 + a(b + c) + bc.$$

Exemplos

$$(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12.$$

$$(2x + 1)(2x + 5) = 4x^2 + 12x + 5.$$

6) Quadrado do trinômio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Exemplo

$$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y.$$

Atenção: erros comuns

- Não vale $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (falta o termo $2ab$).
- No quadrado da diferença, o sinal “-” aparece **só** no termo do meio: $a^2 - 2ab + b^2$.
- Em $(a - b)^3$, os sinais não alternam “sozinho”: o termo do meio tem $-3a^2b$ e o seguinte tem $+3ab^2$.

11.3 Fatoração por reconhecimento

Nesta seção, a ideia é fazer o caminho de volta: olhar para a expressão e decidir qual parêntese gera aqueles termos.

1) Fator comum (colocar em evidência)

É a primeira tentativa em praticamente todo exercício.

Fatorar completamente significa continuar enquanto ainda houver uma fatoração possível. Por exemplo,

$$2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x - 2)(x + 2).$$

Parar em $2x(x^2 - 4)$ ainda não é uma fatoração completa, pois $x^2 - 4$ também pode ser fatorado.

Exemplos

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3).$$

$$12a^2b - 8ab^2 = 4ab(3a - 2b).$$

2) Diferença de quadrados

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Exemplos

$$x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9).$$

$$9y^2 - 25 = (3y - 5)(3y + 5).$$

3) Trinômio quadrado perfeito (TQP)

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Como reconhecer?

- O 1^a e o 3^a termos são quadrados perfeitos.
- O termo do meio é ± 2 vezes o produto das raízes.

Exemplos

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

$$4y^2 - 12y + 9 = (2y - 3)^2.$$

Atenção: quando parece TQP, mas não é

Por exemplo, $x^2 + 8x + 16$ é TQP, mas $x^2 + 8x + 15$ **não** é.

Nos dois casos, o primeiro termo é x^2 e o termo do meio é $8x$. A diferença está no último termo: para formar $(x+4)^2$, ele precisa ser $4^2 = 16$. Reconhecer os três termos ao mesmo tempo evita fatorar por um padrão apenas parecido.

11.4 Trinômios do 2ª grau

Caso 1: $x^2 + bx + c$ (soma e produto)

Se o coeficiente do x^2 é 1, tentamos:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n),$$

com $m + n = b$ e $mn = c$.

Exemplos

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Erro comum

Quando $c > 0$, m e n têm o **mesmo sinal**; quando $c < 0$, têm **sinais opostos**.

Caso 2: $ax^2 + bx + c$ (quebra do termo do meio)

1. Calcular ac .
2. Encontrar p e q tais que $pq = ac$ e $p + q = b$.
3. Reescrever bx como $px + qx$.
4. Fatorar por agrupamento.

Exemplo

Fatore $2x^2 + 7x + 3$.

Como $ac = 6$, buscamos p e q com $pq = 6$ e $p + q = 7$. Serve 1 e 6:

$$2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + x + 6x + 3.$$

Agrupando:

$$(2x^2 + x) + (6x + 3) = x(2x + 1) + 3(2x + 1) = (2x + 1)(x + 3).$$

11.5 Fatoração por agrupamento

Agrupar é **fabricar** um fator comum em duas partes. A meta é: **o mesmo binômio aparece duas vezes**.

Modelo

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y).$$

Técnica passo a passo

1. Separe em dois grupos (geralmente 2 e 2 termos).
2. Fatore o máximo possível em cada grupo.
3. Se aparecer o mesmo binômio, coloque-o em evidência.
4. Se não aparecer, **mude o agrupamento** (às vezes só trocar a ordem resolve).

Exemplos guiados

Exemplo 1. Fatore $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$.

$$(x^3 + 3x^2) + (2x + 6) = x^2(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 2).$$

Exemplo 2. Fatore $4a^2 - 2ab + 6a - 3b$.

$$(4a^2 - 2ab) + (6a - 3b) = 2a(2a - b) + 3(2a - b) = (2a - b)(2a + 3).$$

Exemplo 3 (troca de ordem). Fatore $5x^2 - 10x + 3x - 6$.

$$(5x^2 - 10x) + (3x - 6) = 5x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(5x + 3).$$

11.6 Fatoração e frações algébricas

Em uma fração algébrica, só podemos cancelar **fatores**, nunca termos ligados por adição ou subtração. Por exemplo,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3, \quad x \neq 3.$$

A restrição $x \neq 3$ permanece mesmo depois da simplificação, pois a expressão original não estava definida em $x = 3$. Já em

$$\frac{x + 3}{x},$$

não podemos “cortar o x ”, porque $x + 3$ não é um produto que tenha x como fator.

Outra aplicação decisiva aparece nas equações: se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$. Assim,

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

leva a $x = 2$ ou $x = -5$. Essa propriedade do produto nulo é o elo entre fatoração e resolução de equações.

O que fazer quando a fatoração não sai de primeira?

- Verifique se há **fator comum** em todos os termos.
- Se houver quatro termos, tente **agrupar em dois pares**.
- Se não funcionar, **reordene os termos** e teste outro agrupamento.
- A meta é obter **o mesmo binômio como fator** em ambos os grupos.

11.7 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Expanda:

$$(2x - 5)^2.$$

Solução

$$(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25.$$

Resolvido 2

Fatore completamente:

$$12a^2b - 8ab^2.$$

Solução

$$12a^2b - 8ab^2 = 4ab(3a - 2b).$$

Resolvido 3

Fatore:

$$9x^2 - 1.$$

Solução

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x - 1)(3x + 1).$$

Resolvido 4

Fatore:

$$x^2 + 12x + 36.$$

SoluçãoComo $36 = 6^2$ e $12x = 2 \cdot x \cdot 6$, então:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2.$$

Resolvido 5

Fatore:

$$x^2 - 5x + 6.$$

SoluçãoBuscamos m e n com $m + n = -5$ e $mn = 6$. Serve -2 e -3 :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Resolvido 6

Fatore:

$$3x^2 + 11x + 6.$$

SoluçãoComo $ac = 18$, procuramos p e q com $pq = 18$ e $p + q = 11$. Serve 2 e 9 :

$$3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + 2x + 9x + 6.$$

$$(3x^2 + 2x) + (9x + 6) = x(3x + 2) + 3(3x + 2) = (3x + 2)(x + 3).$$

Resolvido 7

Fatore por agrupamento:

$$2y^3 - 8y^2 + 3y - 12.$$

Solução

$$(2y^3 - 8y^2) + (3y - 12) = 2y^2(y - 4) + 3(y - 4) = (y - 4)(2y^2 + 3).$$

Resolvido 8

Simplifique:

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}, \quad (x \neq 4).$$

Solução

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)^2} = \frac{x + 4}{x - 4}.$$

11.8 Exercícios Propostos**Fundamentos**

1. Expanda:

- (a) $(x + 4)^2$
- (b) $(3a - 1)^2$
- (c) $(2x + 5)(2x - 5)$
- (d) $(x + y + 1)^2$

2. Fatore por fator comum:

- (a) $6x + 12$
- (b) $15a^2b - 10ab^2$
- (c) $8x^3 - 12x^2$

3. Fatore por diferença de quadrados:

- (a) $x^2 - 81$
- (b) $4y^2 - 49$

11. PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

(c) $9a^2b^2 - 1$

4. Reconheça e fatore (TQP):

(a) $x^2 + 10x + 25$

(b) $4y^2 - 12y + 9$

(c) $a^2 - 14a + 49$

5. Fatore $(x^2 + bx + c)$:

(a) $x^2 + 9x + 20$

(b) $x^2 - 2x - 15$

(c) $x^2 - 7x + 10$

6. Fatore $(ax^2 + bx + c)$:

(a) $2x^2 - 3x - 2$

(b) $3x^2 + 5x - 2$

(c) $4x^2 - 4x - 8$

7. Fatore por agrupamento:

(a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

(b) $a^3 + a^2 - 2a - 2$

(c) $6x^2 - 9x + 4x - 6$

(d) $3ab - 6a + 2b - 4$

8. Simplifique (fatore antes):

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5}, \quad (x \neq 5).$$

9. Simplifique:

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}, \quad (x \neq -5).$$

10. Resolva (fatorando):

$$x^2 - 16 = 0.$$

Aplicação

11. Simplifique (fatore completamente):

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}, \quad (x \neq 3).$$

12. Fatore e simplifique:

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4}, \quad (x \neq \pm 2).$$

13. Resolva (fatorando):

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Domínio

14. Encontre k para que $x^2 + kx + 16$ seja um trinômio quadrado perfeito.

15. Fatore e simplifique (indique as restrições):

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}.$$

16. Mostre que:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Coroação

17. Fatore completamente:

$$x^4 - 16.$$

18. Simplifique completamente:

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}.$$

19. Resolva:

$$x^4 - 16 = 0.$$

11.9 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e diferença de quadrados;
- fatoração por reconhecimento: fator comum, diferença de quadrados e trinômio quadrado perfeito;
- fatoração de trinômios do 2ª grau ($x^2 + bx + c$ e $ax^2 + bx + c$);
- fatoração por agrupamento e sinais que ajudam a reconhecer quando usá-la;
- aplicações: simplificação de frações algébricas e resolução de equações.

CAPÍTULO 12

Polinômios

Motivação 12.1

Os **polinômios** surgem naturalmente quando combinamos somas, produtos e potências de variáveis. Eles aparecem em diversas áreas da matemática porque conseguem representar padrões, modelar fenômenos e simplificar problemas algébricos complexos.

Além disso, muitas equações importantes podem ser escritas na forma polinomial. Estudar raízes, fatoração e divisões de polinômios permite compreender melhor o comportamento dessas expressões e desenvolver métodos gerais para resolver problemas algébricos.

Contexto histórico 12.1

O estudo dos polinômios está diretamente ligado à busca por soluções de equações. Desde a Antiguidade, matemáticos desenvolveram métodos para resolver equações quadráticas e, posteriormente, cúbicas e quárticas. Com o avanço da álgebra, os polinômios passaram a ser vistos não apenas como ferramentas de cálculo, mas como objetos matemáticos fundamentais. O estudo de suas raízes e fatorações levou a descobertas profundas sobre estruturas algébricas e teoria das equações.

Mesmo atualmente, polinômios continuam centrais na matemática e em aplicações científicas, aparecendo em modelagem física, computação, engenharia e aproximações numéricas.

12.1 Introdução

Polinômios aparecem naturalmente quando combinamos somas, produtos e potências de variáveis. Expressões desse tipo são fundamentais na álgebra

12. POLINÔMIOS

porque permitem representar funções, modelar fenômenos e estudar equações de diferentes graus.

Por exemplo, o polinômio

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$$

tem grau 3.

Ao trabalhar com polinômios, surgem questões importantes:

- como simplificar e organizar expressões;
- como multiplicar e fatorar polinômios;
- como dividir uma expressão por outra;
- como encontrar valores que anulam um polinômio.

O estudo dessas ideias permite compreender melhor o comportamento algébrico das expressões e fornece ferramentas importantes para resolver equações e problemas matemáticos mais avançados.

12.2 Polinômios: grau e termos semelhantes

Termos semelhantes

Dois termos são semelhantes quando têm a mesma parte literal (mesma variável com o mesmo expoente). Por exemplo, $3x^2$ e $-5x^2$ são semelhantes; $3x^2$ e $3x$ não são.

Grau

O **grau** de um polinômio não nulo é o maior expoente da variável com coeficiente não nulo.

Exemplos

- $P(x) = 7x^4 - 2x + 1$ tem grau 4.
- $Q(x) = -3x^2 + 5x - 9$ tem grau 2.
- $R(x) = 5$ (constante não nula) tem grau 0.

12.3 Operações com polinômios

Adição e subtração

Somamos/subtraímos coeficientes dos termos semelhantes.

Exemplo

$$(3x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 7x - 1) = 4x^2 + 5x + 4.$$

Multiplicação

Multiplicamos termo a termo (distributiva) e depois reduzimos.

Exemplo

$$(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15.$$

Exemplo (um pouco maior)

$$\begin{aligned}(2x^2 - x + 1)(x + 2) &= (2x^2 - x + 1)x + (2x^2 - x + 1)2 \\ &= (2x^3 - x^2 + x) + (4x^2 - 2x + 2) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - x + 2.\end{aligned}$$

12.4 Identidades

Algumas identidades algébricas aparecem frequentemente em fatorações e simplificações de polinômios.

Produtos notáveis (revisão)

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Identidade útil com $x^n - y^n$

Para $n \in \mathbb{N}$:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Exemplos

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4). \\ a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

12.5 Divisão algébrica de polinômios

Dividir polinômios significa encontrar $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto) tais que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x),$$

com $\deg(R) < \deg(D)$ (ou $R(x) = 0$).

Exemplo

Divida $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ por $D(x) = x + 2$.

Solução

Como a divisão é por um binômio de primeiro grau, podemos usar Briot–Ruffini (ver a seção seguinte). Aqui, registramos o resultado:

$$2x^3 + 3x^2 - x + 2 = (x + 2)(2x^2 - x + 1) + 0.$$

12.6 Briot–Ruffini

Quando o divisor tem a forma $x - a$, existe um algoritmo rápido (Briot–Ruffini) para obter o quociente e o resto.

Passos

1. Escreva os coeficientes de $P(x)$ em ordem decrescente (use 0 para termos que faltam).
2. Use o valor de a correspondente ao divisor $x - a$.
3. Desça o primeiro coeficiente e repita: multiplicar por a e somar.

Exemplo

Divida $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ por $x + 2 = x - (-2)$.

Coefficientes: 2, 3, -1, 2 e $a = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ & & -4 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo, o quociente é $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ e o resto é 0.

12.7 Resto, fator e raízes**Teorema do Resto**

Ao dividir $P(x)$ por $x - a$, o resto é $P(a)$.

Teorema do Fator

$(x - a)$ é fator de $P(x)$ se, e somente se, $P(a) = 0$.

Raiz

Um número a é **raiz** (ou zero) de $P(x)$ quando $P(a) = 0$.

Exemplo

Verifique se $x - 2$ é fator de $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$.

Solução

Calculamos $P(2)$:

$$P(2) = 8 - 16 - 14 + 10 = -12 \neq 0.$$

Logo, $x - 2$ **não** é fator e 2 **não** é raiz.

Exemplo (achando uma raiz inteira)

Encontre uma raiz de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Solução

Os candidatos inteiros que dividem o termo constante são

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6.$$

12. POLINÔMIOS

Como

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0,$$

concluimos que 1 é raiz e $(x - 1)$ é fator.

Aplicando Briot-Ruffini com $a = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Então:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

12.8 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Determine o grau e o coeficiente dominante de:

$$P(x) = -4x^5 + 2x^3 - 7.$$

Solução

O grau é 5 e o coeficiente dominante é -4 .

Resolvido 2

Calcule:

$$(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 5x - 4).$$

Solução

$$(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 5x - 4) = 3x^2 + 2x - 3.$$

Resolvido 3

Multiplique e reduza:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Solução

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8.$$

Resolvido 4

Use Briot–Ruffini para dividir:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

por:

$$x - 1.$$

Solução

Coefficientes: 1, -6, 11, -6 e $a = 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Logo:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

e o resto é 0.

Resolvido 5

Encontre as raízes de:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Solução

Como visto:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Logo, as raízes são:

$$1, \quad 2, \quad 3.$$

12.9 Exercícios Propostos**Fundamentos**

1. Reduza os termos semelhantes:

(a) $3x^2 - 5x + 2 + 7x^2 + x - 9$

(b) $4a^3 - 2a^2 + 3a - (a^3 - 5a^2 + a)$

2. Determine o grau:

12. POLINÔMIOS

(a) $P(x) = 7x^6 - 2x^4 + x - 1$

(b) $Q(x) = -3x^2 + 5$

(c) $R(x) = 9$

3. Calcule:

(a) $(x + 2)(x - 7)$

(b) $(2x - 1)(x + 4)$

(c) $(x - 3)^2$

Aplicação

4. Use a identidade

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

para fatorar $x^3 - 27$.

5. Divida $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ por $x + 2$.

6. Use Briot–Ruffini para dividir $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ por $x - 1$.

Domínio

7. Calcule o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ por $x - 2$.

8. Verifique se $x + 1$ é fator de $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

9. Encontre as raízes reais de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Coroação

10. Mostre que, se a é raiz de um polinômio $P(x)$, então $(x - a)$ é fator de $P(x)$.

11. Fatore completamente:

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6.$$

12. Determine os valores reais das constantes a e b para que o polinômio

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 18$$

seja divisível por $(x - 3)^2$.

12.10 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- definição de polinômio, termos semelhantes e grau;
- operações: adição, subtração e multiplicação;
- identidades úteis (incluindo fatorações do tipo $x^n - y^n$);
- divisão algébrica e a relação $P = DQ + R$;
- Briot–Ruffini para divisões por $x - a$;
- teorema do resto, teorema do fator e raízes.

CAPÍTULO 13

Equações e Inequações

Motivação 13.1

Muitos problemas matemáticos envolvem descobrir valores desconhecidos ou determinar condições que certas quantidades devem satisfazer. As **equações** surgem quando buscamos valores que tornam duas expressões iguais, enquanto as **inequações** descrevem situações envolvendo limites, intervalos e comparações.

Essas ferramentas permitem modelar problemas de áreas como física, economia, geometria e engenharia, transformando situações concretas em relações algébricas que podem ser analisadas e resolvidas sistematicamente.

Contexto histórico 13.1

O estudo das equações começou em problemas práticos ligados a comércio, medições e divisão de terras. Civilizações antigas já utilizavam métodos para resolver equações simples, ainda sem a linguagem algébrica moderna.

Com o desenvolvimento da álgebra simbólica, especialmente a partir dos trabalhos de matemáticos árabes e europeus, as equações passaram a ser manipuladas de forma geral por meio de regras algébricas. Isso permitiu criar métodos sistemáticos de resolução e ampliar o estudo para expressões mais complexas.

As inequações surgiram naturalmente quando os problemas deixaram de buscar apenas igualdade e passaram a envolver restrições e intervalos de valores possíveis. Hoje, equações e inequações são ferramentas fundamentais em praticamente toda a matemática aplicada.

13.1 Introdução

Equações e inequações aparecem sempre que precisamos transformar um problema em uma condição matemática e, depois, descobrir quais valores tornam essa condição verdadeira.

Em uma equação, buscamos os valores da incógnita que satisfazem uma igualdade. Já em uma inequação, procuramos os valores que satisfazem uma desigualdade, e a solução normalmente é descrita por intervalos na reta real.

Por exemplo, $2x + 3 = 11$ é uma equação, enquanto $2x + 3 > 11$ é uma inequação.

Embora muitas técnicas sejam semelhantes, algumas situações exigem cuidados específicos. Em inequações, por exemplo, o sentido da desigualdade muda ao multiplicarmos ou dividirmos por um número negativo. Em equações com raízes, é necessário verificar condições de existência e possíveis soluções inválidas.

Ao longo deste capítulo estudaremos diferentes tipos de equações e inequações, desenvolvendo métodos de resolução e interpretação das soluções obtidas.

Uma boa resolução não termina quando encontramos um número. Ela termina quando verificamos se esse número realmente atende à condição inicial e escrevemos a resposta no formato adequado: um valor, dois valores, um intervalo ou um conjunto solução.

13.2 Equações do 1ª grau

Forma geral

Uma equação do 1ª grau em x pode ser escrita como

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

A solução é obtida isolando x :

$$\begin{aligned} ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Podemos pensar na igualdade como uma balança: toda operação feita em um lado deve ser feita também no outro. Somar, subtrair, multiplicar ou dividir os dois membros pelo mesmo número não nulo preserva a igualdade.

Esse cuidado evita o erro de “passar para o outro lado trocando o sinal” sem entender qual operação foi realizada.

Exemplo

Resolva $5x - 7 = 18$.

Solução

$$5x = 25$$

$$x = 5.$$

Inequações do 1ª grau

A resolução é semelhante à das equações. A principal diferença é que, ao multiplicar ou dividir por um número negativo, o sentido da desigualdade se inverte.

Isso acontece porque a ordem dos números muda quando mudamos todos os sinais: como $2 < 5$, temos $-2 > -5$. Nas demais operações — somar ou subtrair o mesmo número, ou multiplicar e dividir por número positivo — o sentido é mantido.

Exemplo

Resolva $-2x + 3 \geq 9$.

Solução

$$-2x \geq 6$$

$$x \leq -3.$$

Na reta real, essa resposta representa todos os números menores ou iguais a -3 . Em notação de intervalo, escrevemos $(-\infty, -3]$.

13.3 Equações do 2ª grau

Forma geral e discriminante

Uma equação do 2ª grau possui a forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Definimos o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

e as raízes são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

O valor de Δ informa quantas raízes reais a equação possui:

- se $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas;
- se $\Delta = 0$, há uma raiz real dupla;
- se $\Delta < 0$, não há raiz real.

Antes de aplicar a fórmula, vale conferir se a expressão está organizada na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Esse passo simples evita trocar sinais de b ou de c .

Exemplo

Resolva $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução

O discriminante é $\Delta = 25 - 24 = 1$, logo

$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$

e assim $x = 2$ ou $x = 3$.

Outra forma de resolver: soma e produto

Quando a equação possui coeficiente $a = 1$, muitas vezes é possível resolver por fatoração.

No caso de $x^2 - 5x + 6 = 0$, procuramos dois números cuja:

- soma seja -5 ;
- produto seja 6 .

Os números -2 e -3 satisfazem essas condições. Assim,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3),$$

e logo $(x - 2)(x - 3) = 0$. Portanto, $x = 2$ ou $x = 3$.

Exemplo (raiz dupla)

Resolva $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solução

O discriminante é $\Delta = 36 - 36 = 0$, logo $x = \frac{6}{2} = 3$.

Nesse caso, a equação possui duas raízes reais iguais. Também podemos observar que $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, e assim $(x - 3)^2 = 0$, ou seja, $x = 3$.

13.4 Equações biquadradas

Ideia

Uma equação biquadrada possui a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Nesse caso, fazemos a substituição $y = x^2$. Assim, a equação se transforma em uma equação do 2ª grau em y .

Exemplo

Resolva $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solução

Seja $y = x^2$. Então $y^2 - 5y + 4 = 0$ e, fatorando, $(y - 1)(y - 4) = 0$, ou seja, $y = 1$ ou $y = 4$.

Assim, $x^2 = 1$ dá $x = \pm 1$, e $x^2 = 4$ dá $x = \pm 2$.

Como estamos procurando soluções reais, há um cuidado importante: a substituição $y = x^2$ impõe $y \geq 0$. Se a equação em y produzir um valor negativo, ele deve ser descartado, pois nenhum número real elevado ao quadrado é negativo.

13.5 Equações modulares

Definição

O módulo representa distância e é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Por isso, $|x - a|$ pode ser lido como a distância entre x e a na reta real. Essa interpretação ajuda a entender por que uma equação do tipo $|u| = k$, com $k > 0$, geralmente possui duas soluções: há dois pontos à mesma distância da origem ou do ponto de referência.

Equação do tipo $|u| = k$

Se $k < 0$, não existe solução real. Se $k \geq 0$, então

$$|u| = k \Leftrightarrow u = k \quad \text{ou} \quad u = -k.$$

Exemplo

Resolva $|2x - 3| = 5$.

Solução

De $2x - 3 = 5$ vem $x = 4$; de $2x - 3 = -5$ vem $x = -1$.

13.6 Equações irracionais

Ideia e cuidado

Equações irracionais envolvem raízes. Nesses casos, é necessário verificar:

- as condições de existência dos radicais;
- possíveis soluções inválidas obtidas após elevar ambos os lados ao quadrado.

Elevar os dois lados ao quadrado pode criar soluções que não existiam na equação original. Por isso, os valores obtidos são apenas **candidatos** até serem substituídos novamente na expressão inicial.

Exemplo

Resolva $\sqrt{x + 5} = x - 1$.

Solução

As condições de existência são $x + 5 \geq 0$ e $x - 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Elevando ao quadrado, $x + 5 = (x - 1)^2$, isto é, $x + 5 = x^2 - 2x + 1$. Reorganizando e fatorando,

$$0 = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1),$$

de modo que os candidatos são $x = 4$ e $x = -1$. Como $x \geq 1$, resta apenas $x = 4$.

13.7 Equações exponenciais básicas

Princípio

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, a função a^x é injetiva. Assim,

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Essa regra só pode ser usada quando as potências têm a mesma base positiva, diferente de 1. Quando as bases parecem diferentes, primeiro tentamos escrevê-las como potências de uma base comum, como $8 = 2^3$ e $\frac{1}{27} = 3^{-3}$.

Exemplo

Resolva $2^{x+1} = 16$.

Solução

Como $16 = 2^4$, temos $2^{x+1} = 2^4$. Logo, $x + 1 = 4$ e $x = 3$.

Exemplo

Resolva $3^{2x} = \frac{1}{27}$.

Solução

Como $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, temos $3^{2x} = 3^{-3}$. Logo, $2x = -3$ e $x = -\frac{3}{2}$.

13.8 Inequações diversas

Exemplo

Resolva $(x - 1)(x + 3) \leq 0$.

Solução

Os pontos críticos são $x = 1$ e $x = -3$. O produto é negativo ou nulo entre as raízes. Portanto, $-3 \leq x \leq 1$.

Em inequações que envolvem produto ou quociente, não basta resolver cada fator separadamente. Marcamos os pontos críticos na reta e analisamos o sinal em cada intervalo. Se houver denominador, seus zeros nunca podem pertencer à solução, pois a expressão não está definida nesses pontos.

Exemplo com módulo

Resolva $|x - 2| < 3$.

Solução

Temos $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$. Somando 2, obtemos $-1 < x < 5$.

Para comparar, $|x - 2| \geq 3$ significaria que a distância de x até 2 é pelo menos 3; nesse caso, a solução ficaria fora do intervalo central: $x \leq -1$ ou $x \geq 5$.

13.9 Exercícios Resolvidos

Resolvido 1

Resolva $7x - 4 = 3x + 20$.

Solução

De $4x = 24$ vem $x = 6$.

Resolvido 2

Resolva $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Solução

O discriminante é $\Delta = 9 + 16 = 25$, logo $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, e assim $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -2$.

Resolvido 3

Resolva $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Solução

Seja $y = x^2$. Então $y^2 - 10y + 9 = 0$ e, fatorando, $(y - 1)(y - 9) = 0$. Logo, $x = \pm 1$ ou $x = \pm 3$.

Resolvido 4

Resolva $|x + 1| = 2x - 5$.

Solução

Como $|x + 1| \geq 0$, é necessário que $2x - 5 \geq 0$, ou seja, $x \geq \frac{5}{2}$. Então $x + 1 = 2x - 5$, e $x = 6$.

13.10 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Resolva:

(a) $3x + 8 = 2 - 5x$

(b) $4 - 7x < 18$

(c) $\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{4} = 1$

2. Resolva:

(a) $x^2 - 9x + 20 = 0$

(b) $3x^2 - 12x + 12 = 0$

(c) $2x^2 + x - 6 = 0$

Aplicação

3. Resolva a equação biquadrada:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0.$$

4. Resolva:

(a) $|3x - 1| = 7$

(b) $|x - 4| \leq 2$

5. Resolva:

$$\sqrt{2x+3} = x.$$

6. Um retângulo possui lados $x + 2$ e $x - 1$. Sabendo que sua área é igual a 12, determine os possíveis valores de x .

7. A soma de um número com seu quadrado é igual a 30. Determine esse número.

Domínio

8. Resolva:

(a) $2^{2x-1} = 8$

(b) $9^x = \frac{1}{3}$

9. Resolva a inequação:

$$(x - 2)(x + 5) > 0.$$

10. Resolva:

$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq 0.$$

11. Resolva:

$$|2x + 3| \geq 5.$$

Coroação

12. Resolva e apresente o conjunto solução:

$$\sqrt{x + 1} > x - 1.$$

13. Determine todos os valores reais de k para que:

$$x^2 - kx + 9 = 0$$

possua uma única raiz real.

14. Resolva:

$$|x - 2| + |x + 1| = 5.$$

13.11 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- técnicas de resolução de equações e inequações do 1^a grau;
- equações do 2^a grau e o discriminante Δ ;
- equações biquadradas por substituição;
- equações modulares e análise por casos;
- equações irracionais com condições de existência e verificação das soluções;
- equações exponenciais básicas;
- inequações produto, quociente e módulo.

Equações e inequações aparecem em praticamente toda a matemática. Resolver esses problemas significa transformar relações algébricas em condições sobre números e interpretar corretamente os conjuntos solução obtidos.

CAPÍTULO 14

Exercícios da Parte III: Expressões e Álgebra

As questões desta parte exigem duas leituras da mesma expressão: desenvolvida, quando queremos operar, e fatorada, quando queremos reconhecer raízes ou simplificar. Antes de calcular, observe a forma algébrica; escolher bem a representação costuma economizar mais trabalho do que qualquer atalho.

14.1 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Desenvolva:

- (a) $(x + 3)^2$;
- (b) $(2x - 5)(2x + 5)$;
- (c) $(x - 1)^3$;
- (d) $(3x + 2)^2$.

2. Fatore:

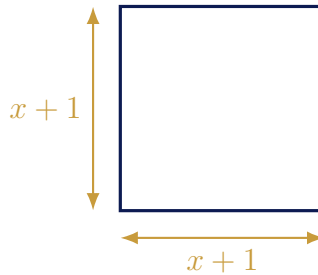
- (a) $x^2 - 9$;
- (b) $3x^2 - 12x$;
- (c) $x^2 + 5x + 6$;
- (d) $4x^2 - 25$;
- (e) $x^2 - 6x + 9$.

3. Simplifique a expressão: $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$, com $x \neq 2$.

4. Simplifique: $\frac{2x^2 - 8x}{2x}$, indicando as restrições.
5. Resolva: (a) $2x - 7 = 5$; (b) $x^2 - 5x = 0$.
6. Resolva: $x^2 - 9 = 0$.

Aplicação

7. Um retângulo tem lados $(x + 2)$ e $(x - 1)$ (com $x > 1$). Escreva a expressão da área em função de x .
8. Resolva a equação: $\frac{x + 1}{x - 2} = 3$.
9. Resolva a equação: $\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} = 1$.
10. Determine x tal que $x^2 + 4x + 1 = 0$.
11. Um número natural n tem a propriedade de que $n(n + 1) = 132$. Determine n .
12. (Com desenho) Um quadrado tem lado $(x + 1)$. Represente a área e o perímetro em função de x .



13. Um triângulo retângulo tem catetos x e $x + 1$ e hipotenusa 5. Determine x .

Domínio

14. Resolva: $x^2 - 6x + 5 = 0$.
15. Simplifique: $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$, indicando as restrições.

16. Se $x + y = 7$ e $xy = 10$, calcule $x^2 + y^2$.
17. Resolva a inequação: $(x - 2)(x + 3) \geq 0$.
18. Determine o conjunto solução de $\frac{x - 1}{x + 2} < 0$.

Coroação

19. (Desafio) Resolva em $\mathbb{R}$: $|x^2 - 4x| = 3$.
20. (Desafio) Encontre todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(x+1) - P(x) = 2x$.
21. (Desafio) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

PARTE IV • RELAÇÕES E FUNÇÕES

CAPÍTULO 15

Relações e Funções

Motivação 15.1

Em muitas situações, uma quantidade depende diretamente de outra: o preço depende da quantidade comprada, a distância depende do tempo e a área de um círculo depende do raio. O conceito de **função** organiza matematicamente essas relações de dependência.

Por meio das funções, conseguimos descrever padrões, fazer previsões e representar fenômenos utilizando tabelas, fórmulas e gráficos. Essa linguagem se tornou uma das ferramentas mais importantes da matemática e das ciências.

Contexto histórico 15.1

A ideia de função surgiu gradualmente a partir do estudo de fenômenos geométricos e físicos. Com o desenvolvimento da geometria analítica, tornou-se possível representar curvas por equações envolvendo variáveis relacionadas.

No século XVIII, matemáticos como Euler ajudaram a consolidar o conceito de função como uma relação entre entradas e saídas. Posteriormente, a matemática moderna formalizou noções como domínio, imagem e contradomínio, tornando o conceito mais rigoroso e preciso.

Atualmente, funções aparecem em praticamente todas as áreas científicas, desde economia e engenharia até computação, estatística e modelagem de fenômenos naturais.

15.1 Introdução

A ideia de função aparece sempre que uma quantidade depende de outra. Em termos matemáticos, isso significa associar cada valor de entrada a um único valor de saída.

Antes de formalizar esse conceito, precisamos entender como representar pares de valores e como relacionar elementos de diferentes conjuntos. Por isso, começaremos com pares ordenados, produto cartesiano e relações.

Ao longo do capítulo, veremos como representar funções por tabelas, fórmulas e gráficos, além de estudar conceitos importantes como domínio, imagem, crescimento, composição e função inversa.

15.2 Pares ordenados e produto cartesiano

Par ordenado

Um **par ordenado** é uma dupla (x, y) em que a ordem dos elementos importa: em geral, $(x, y) \neq (y, x)$.

Dois pares ordenados são iguais quando possuem os mesmos elementos na mesma ordem:

$$(x, y) = (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad x = u \text{ e } y = v.$$

Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B , o **produto cartesiano** é o conjunto formado por todos os pares ordenados possíveis:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Exemplo

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

15.3 Relações

Uma **relação** de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$. Isso significa que uma relação escolhe alguns pares ordenados do produto cartesiano.

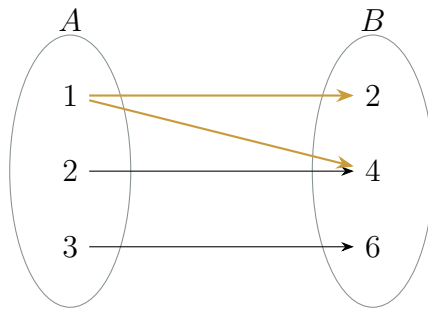
Representações

Uma relação pode ser representada de diferentes maneiras:

- lista de pares ordenados;
- diagramas de setas;
- leis algébricas;
- gráficos no plano cartesiano.

Exemplo

Considere $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. Se $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (1, 4)\}$, temos a seguinte representação:



Observe que o elemento $1 \in A$ está associado a dois elementos diferentes de B . Portanto, essa relação não representa uma função.

15.4 Funções

Definição

Uma **função** f de A em B , indicada por $f : A \rightarrow B$, associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$.

A principal característica de uma função é:

cada entrada possui exatamente uma saída.

Entradas diferentes podem ter a mesma saída. Por exemplo, na função $f(x) = x^2$, temos $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$; isso não impede que f seja função. O que não pode acontecer é uma mesma entrada receber duas saídas diferentes.

Domínio, contradomínio e imagem

Para uma função $f : A \rightarrow B$, temos:

- A é o **domínio**;
- B é o **contradomínio**;
- o conjunto $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$ é a **imagem** da função.

O contradomínio é o conjunto de saídas que declaramos como possíveis; a imagem é o conjunto das saídas que a função efetivamente produz. Assim, elas podem ser diferentes. Essa distinção é importante, sobretudo ao estudar funções inversas.

Exemplo

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. O domínio e o contradomínio são $\mathbb{R}$, e a imagem é $[0, +\infty)$, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Domínio natural

Quando o domínio não é informado, consideramos todos os valores reais para os quais a expressão faz sentido.

Em geral, procuramos dois tipos de restrição: denominadores não podem ser zero e, para raízes quadradas reais, o radicando deve ser não negativo. Depois de encontrar o domínio, vale testá-lo diretamente na expressão: ele indica quais entradas são permitidas, não quais saídas aparecem.

Exemplos

A função $g(x) = \frac{1}{x-2}$ possui domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, e $h(x) = \sqrt{x-1}$ possui domínio $[1, +\infty)$.

Igualdade de funções

Duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e produzem a mesma saída para cada elemento do domínio. Não basta que as fórmulas pareçam diferentes ou coincidam em alguns valores.

Por exemplo, em $\mathbb{R}$, as expressões

$$f(x) = (x+1)^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

definem a mesma função. Já

$$p(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad q(x) = x + 1$$

não definem a mesma função em seus domínios naturais: p não está definida em $x = 1$, enquanto q está.

15.5 Representações de funções e gráficos

Tabela

Uma função pode ser representada por tabelas de valores.

Por exemplo, para $f(x) = 2x + 1$, temos:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Gráfico

O gráfico de uma função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$.

Pelo gráfico, podemos reconhecer informações importantes:

- o domínio é formado pelos valores de x atingidos pelo gráfico;
- a imagem é formada pelos valores de y atingidos pelo gráfico;
- os zeros são as abscissas dos pontos em que o gráfico corta o eixo x ;
- $f(0)$, quando existe, é a ordenada do ponto em que o gráfico corta o eixo y .

Assim, ler um gráfico não significa apenas observar seu formato: significa relacionar cada característica geométrica com uma informação da função.

Teste da reta vertical

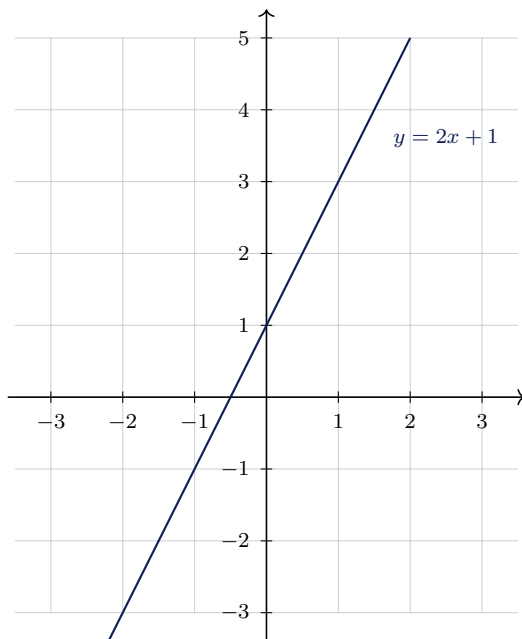
Um gráfico representa uma função quando qualquer reta vertical intersecta o gráfico em no máximo um ponto.

Isso acontece porque cada valor de x deve possuir apenas um valor correspondente de y .

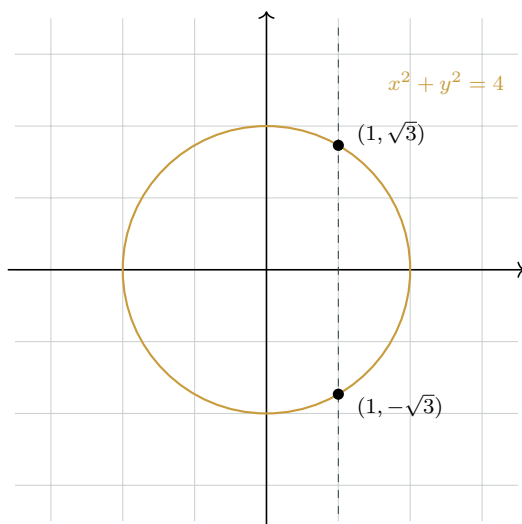
O teste da reta vertical responde apenas se o gráfico representa uma função de x em y . Ele não informa, por si só, domínio, imagem ou se a função possui inversa; essas perguntas exigem observar outras características do gráfico.

Exemplo

Para $f(x) = 2x + 1$, o gráfico é uma reta.

**Exemplo (não representa função)**

A circunferência $x^2 + y^2 = 4$ não representa uma função $y = f(x)$, pois alguns valores de x estão associados a dois valores diferentes de y .



15.6 Crescimento

Funções crescentes e decrescentes

Uma função é:

- **crescente** quando valores maiores de x produzem valores maiores de $f(x)$;
- **decrescente** quando valores maiores de x produzem valores menores de $f(x)$.

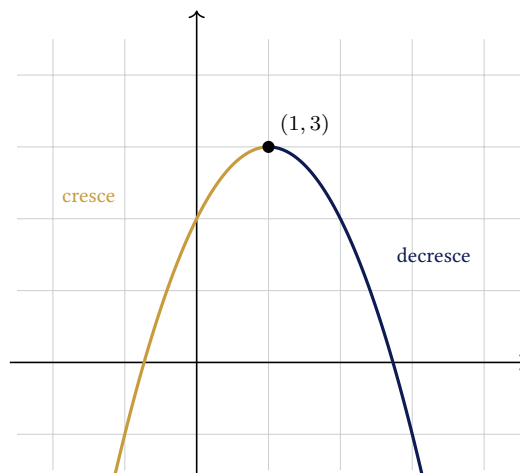
Ao indicar crescimento ou decrescimento, sempre diga em qual intervalo isso ocorre. Uma mesma função pode crescer em uma parte do domínio e decrescer em outra, como acontece com a parábola do exemplo seguinte.

Exemplos

A função $f(x) = 2x + 1$ é crescente em $\mathbb{R}$. Já $g(x) = -x + 2$ é decrescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Considere $h(x) = -(x - 1)^2 + 3$. Essa função cresce até $x = 1$ e decresce após $x = 1$.



15.7 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Considere uma função $f : A \rightarrow B$.

Ela é **injetiva** quando entradas diferentes produzem saídas diferentes. Em símbolos,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Graficamente, uma função é injetiva quando toda reta horizontal intersecta seu gráfico em no máximo um ponto.

Ela é **sobrejetiva** quando todo elemento do contradomínio é atingido por alguma entrada; nesse caso, $\text{Im}(f) = B$.

Uma função é **bijetiva** quando é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva. Essa é exatamente a condição que permite inverter a correspondência entre domínio e contradomínio sem criar ambiguidades.

Por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$, é bijetiva. Já $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^2$, não é injetiva e também não é sobrejetiva, pois não assume valores negativos.

15.8 Composição de funções

Definição

Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, definimos a composição $g \circ f$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ou seja, aplicamos primeiro f e depois g .

Para que $(g \circ f)(x)$ exista, a saída produzida por f precisa pertencer ao domínio de g . Por isso, o domínio de uma composição não é, necessariamente, o domínio inteiro de f .

Exemplo

Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$, então $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$. Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$.

15.9 Função inversa

Ideia

A função inversa “desfaz” a ação da função original.

Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é invertível quando existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$.

Para uma função possuir inversa, entradas diferentes não podem levar à mesma saída. Em linguagem gráfica, uma reta horizontal deve encontrar o gráfico em no máximo um ponto. É por isso que x^2 , definida em todos os reais, não possui inversa como função: 2 e -2 têm a mesma imagem. Ao restringir o domínio a $x \geq 0$ ou a $x \leq 0$, essa ambiguidade desaparece.

Como encontrar a inversa

Para determinar $f^{-1}(x)$, seguimos os passos:

1. escrevemos $y = f(x)$;
2. trocamos x por y ;
3. isolamos y .

Exemplo

Considere $f(x) = 2x - 3$.

Solução

Escrevemos $y = 2x - 3$. Trocando x e y , obtemos $x = 2y - 3$. Então

$$2y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x + 3}{2}.$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$.

Uma verificação rápida é compor as funções: $f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot \frac{x+3}{2} - 3 = x$. Se a composição não devolver x , houve algum erro na inversão.

15.10 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Seja

$$A = \{0, 1, 2\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Considere a relação

$$R = \{(0, 1), (1, 1), (2, 3)\}.$$

(a) A relação R define uma função de A em B ? Justifique.

(b) Determine:

- o domínio;
- o contradomínio;
- a imagem.

2. Considere a função $f(x) = 2x + 1$.

(a) Calcule:

$$f(-2), \quad f(0), \quad f(3).$$

(b) Verifique se o ponto $(1, 5)$ pertence ao gráfico de f .

Aplicação

3. Sem construir os gráficos, use o teste da reta vertical para decidir se os conjuntos abaixo representam funções.

(a) $x^2 + y^2 = 9$

(b) $y = \pm\sqrt{x}$

4. Considere a função

$$h(x) = -(x - 1)^2 + 3.$$

(a) Determine os intervalos em que a função é crescente e decrescente.

(b) Determine o valor máximo da função e o valor de x em que ele ocorre.

Domínio

5. Determine o domínio natural das funções:

(a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 9}$

(b) $g(x) = \sqrt{5 - 2x}$

6. Sejam

$$f(x) = x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Determine o domínio de $(g \circ f)(x)$.

(b) Determine o domínio de $(f \circ g)(x)$.

Coroação

7. Seja

$$f(x) = 3x - 1.$$

(a) Determine $f^{-1}(x)$.

(b) Resolva a equação

$$f(x) = 8$$

utilizando a função inversa.

8. Encontre a função inversa, quando existir.

(a) $f(x) = \frac{x - 1}{2}$

(b) $g(x) = x^2$

Restrinja o domínio de g para que a função seja invertível.

15.11 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- pares ordenados e produto cartesiano;
- relações e funções;
- domínio, contradomínio e imagem;
- igualdade de funções e leitura de domínio, imagem e zeros no gráfico;
- representações gráficas e teste da reta vertical;
- crescimento de funções;
- funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;
- composição de funções;
- função inversa e invertibilidade.

As funções estão entre os conceitos mais importantes da matemática. Elas permitem descrever relações entre grandezas, interpretar fenômenos e construir modelos utilizados em praticamente todas as áreas científicas.

CAPÍTULO 16

Função Afim e Quadrática

Motivação 16.1

Muitas situações do cotidiano envolvem relações entre grandezas: o valor de uma corrida depende da distância percorrida, o lucro de uma empresa depende da quantidade vendida e a altura de um objeto lançado varia com o tempo. Em vários desses casos, o comportamento pode ser descrito por funções simples.

Quando a variação acontece sempre na mesma taxa, utilizamos a **função afim**, cujo gráfico é uma reta. Já quando a taxa de variação também muda ao longo do processo, surge a **função quadrática**, representada por parábolas.

Essas funções aparecem constantemente em física, economia, engenharia, computação e modelagem matemática, servindo como uma das principais portas de entrada para o estudo mais profundo de funções e gráficos.

Contexto histórico 16.1

O desenvolvimento da geometria analítica permitiu unir álgebra e geometria em uma mesma linguagem. A partir dos trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat, curvas passaram a ser representadas por equações algébricas.

As funções afins tornaram-se importantes na modelagem de fenômenos com crescimento constante, enquanto as funções quadráticas passaram a descrever trajetórias, máximos, mínimos e diversos problemas geométricos.

Com o tempo, coeficientes como a , b e c deixaram de ser apenas números em fórmulas e passaram a possuir interpretações geométricas claras, relacionadas à inclinação, concavidade, raízes e posição dos gráficos no plano cartesiano.

16.1 Introdução

Funções afim e quadrática aparecem sempre que queremos descrever como uma quantidade varia em relação a outra. Em muitos problemas, não basta apenas calcular valores isolados: é importante compreender o comportamento da relação como um todo.

Quando a variação ocorre de maneira constante, o gráfico obtido é uma reta. Esse é o caso da **função afim**, utilizada para modelar situações envolvendo crescimento linear, proporcionalidade e taxas fixas.

Já em outros fenômenos, a variação não permanece constante. Trajetórias, máximos, mínimos e comportamentos curvos são frequentemente descritos por parábolas, associadas às **funções quadráticas**.

Além das expressões algébricas, o estudo dessas funções envolve interpretação geométrica. Os coeficientes influenciam diretamente a inclinação da reta, a abertura da parábola, a posição dos gráficos e o comportamento das raízes.

A análise dessas funções permite compreender como expressões algébricas se relacionam com gráficos, crescimento, raízes e diferentes situações matemáticas envolvendo variação entre grandezas.

16.2 Função afim

Definição

Chamamos de **função afim** toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é uma reta.

Quando $b = 0$, temos $f(x) = ax$, chamada de **função linear**. Nesse caso, o gráfico passa pela origem e descreve uma proporcionalidade direta: ao multiplicar x por um número, o valor de $f(x)$ é multiplicado pelo mesmo número.

Na função afim geral, a variação continua constante, mas pode existir um valor inicial b . Por isso, nem toda função afim representa proporcionalidade direta. Na corrida de táxi, por exemplo, a bandeirada é cobrada mesmo quando a distância percorrida é zero.

Coeficientes

Os coeficientes possuem interpretações importantes.

- O número a é o **coeficiente angular**. Ele controla a inclinação da reta.

- Se $a > 0$, a função é crescente.
- Se $a < 0$, a função é decrescente.
- Se $a = 0$, a função é constante.

O coeficiente angular também representa a taxa de variação da função. Para quaisquer $x_1 \neq x_2$,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Isso significa que, quando x aumenta uma unidade, $f(x)$ varia a unidades. Se $a = 2,5$, por exemplo, cada unidade acrescentada à entrada aumenta a saída em 2,5.

- O número b é o **coeficiente linear**. Ele indica o ponto em que a reta intercepta o eixo y .

Equação da reta por dois pontos

Dois pontos distintos determinam uma única reta. Se ela passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_1 \neq x_2$, calculamos primeiro

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Depois, substituímos um dos pontos em $y = ax + b$ para encontrar b .

Por exemplo, a reta que passa por $(1, 3)$ e $(4, 9)$ possui

$$a = \frac{9 - 3}{4 - 1} = 2.$$

Usando $(1, 3)$, temos $3 = 2 \cdot 1 + b$, logo $b = 1$. Portanto, sua equação é $f(x) = 2x + 1$.

Zero da função

O zero (ou raiz) da função é o valor de x tal que $f(x) = 0$. Na função afim, isso significa $ax + b = 0$. Logo,

$$x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0.$$

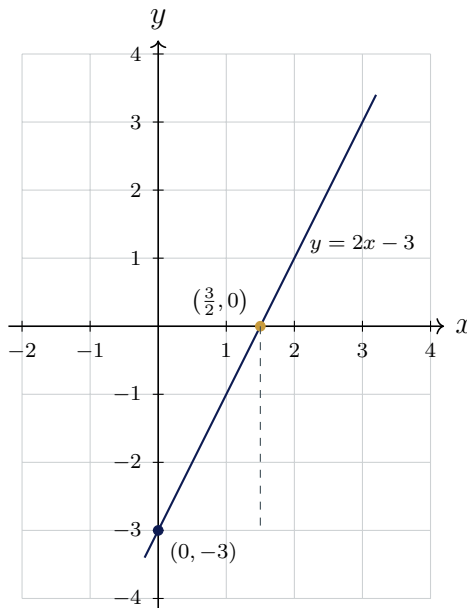
Sinal da função afim

Quando $a \neq 0$, o zero $x_0 = -\frac{b}{a}$ divide a reta real em dois intervalos. Se $a > 0$, então $f(x) < 0$ para $x < x_0$ e $f(x) > 0$ para $x > x_0$. Se $a < 0$, ocorre o contrário. Essa leitura permite resolver inequações afins diretamente pelo gráfico.

Exemplo

Considere $f(x) = 2x - 3$.

- Como $a = 2 > 0$, a função é crescente.
- O coeficiente linear é $b = -3$. Assim, a reta corta o eixo y no ponto $(0, -3)$.
- O zero da função é dado por $2x - 3 = 0$, ou seja, $x = \frac{3}{2}$.



16.3 Função quadrática

Definição

Chamamos de **função quadrática** toda função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola.

O coeficiente $c = f(0)$ indica o ponto $(0, c)$ em que a parábola intercepta o eixo y . O coeficiente b participa da posição do eixo de simetria e do vértice, enquanto a controla a concavidade e a abertura: quanto maior $|a|$, mais fechada é a parábola; quanto menor $|a|$, mais aberta ela é.

Concavidade

O sinal de a determina a abertura da parábola.

- Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.
- Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

Zeros da função e discriminante

Os zeros da função são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Definimos o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Se $\Delta > 0$, existem duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla.
- Se $\Delta < 0$, não existem raízes reais.

Bhaskara

Quando $\Delta \geq 0$, as raízes reais são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Soma e produto

As raízes x_1 e x_2 satisfazem

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Quando as raízes reais são conhecidas, a função pode ser escrita na forma fatorada

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Essa forma torna os zeros imediatamente visíveis e facilita o estudo do sinal da função.

Exemplo

Resolva $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Procuramos dois números cuja soma seja 5 e o produto seja 6; os números 2 e 3 satisfazem essas condições. Logo,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3),$$

e assim $x = 2$ ou $x = 3$.

Vértice

O vértice é o ponto onde a parábola atinge valor máximo ou mínimo.

Sua coordenada em x é

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

e a coordenada em y é $y_v = f(x_v)$.

Também podemos calcular

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Essas fórmulas aparecem ao reescrever a função na forma canônica:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Nessa forma, o vértice e a concavidade podem ser lidos diretamente.

Eixo de simetria

A reta $x = x_v$ divide a parábola em duas partes simétricas.

Se $a > 0$, o vértice fornece o valor mínimo da função e sua imagem é $[y_v, +\infty)$. Se $a < 0$, o vértice fornece o valor máximo e a imagem é $(-\infty, y_v]$.

Além disso, a função é decrescente de um lado do vértice e crescente do outro. Para $a > 0$, ela decresce até x_v e cresce depois de x_v ; para $a < 0$, ocorre o contrário.

Sinal da função quadrática

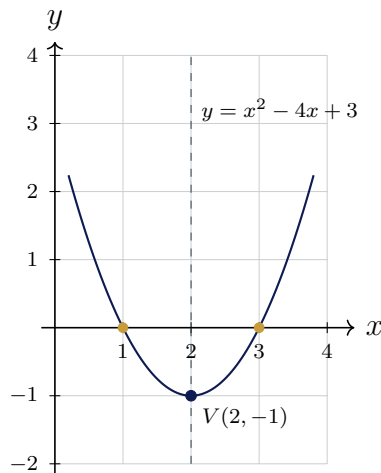
Quando há duas raízes reais distintas $x_1 < x_2$, o sinal depende da concavidade. Se $a > 0$, a função é positiva fora do intervalo entre as raízes e negativa dentro dele. Se $a < 0$, ocorre o contrário.

Quando $\Delta = 0$, a parábola apenas toca o eixo x no vértice. Quando $\Delta < 0$, ela não corta o eixo x e mantém sempre o sinal de a .

Exemplo completo

Considere $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Como $a = 1 > 0$, a concavidade é voltada para cima.
- O discriminante é $\Delta = 4$.
- As raízes são $x = 1$ e $x = 3$.
- O vértice é $V(2, -1)$.



16.4 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Para cada função afim abaixo:
 - (a) identifique os coeficientes a e b ;
 - (b) diga se a função é crescente ou decrescente;
 - (c) determine o zero da função, quando existir.

$$f(x) = 3x + 6 \quad g(x) = -2x + 5 \quad h(x) = 4$$

2. Determine a equação da reta que passa por $(0, -1)$ e possui zero em $x = 2$.
3. Para:

$$q(x) = x^2 - 4x + 3,$$

- (a) identifique a , b e c ;
- (b) determine o vértice;
- (c) indique a concavidade.

Aplicação

4. Um táxi cobra R\$ 6,00 de bandeirada e R\$ 2,50 por quilômetro rodado.
 - (a) Escreva a função custo $C(x)$.
 - (b) Calcule o custo para 12 km.

5. Para:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3,$$

- (a) determine as raízes por Bhaskara;
- (b) verifique usando soma e produto;
- (c) determine o vértice;
- (d) diga se existe máximo ou mínimo.

Domínio

6. Considere:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

restrita ao intervalo:

$$[0, 4].$$

(a) Determine a imagem da função nesse intervalo.

(b) Determine os valores de x tais que:

$$f(x) \leq 0.$$

7. Determine os valores de m para que:

$$x^2 - mx + 4 = 0$$

possua raízes reais e distintas.

Coroação

8. Considere:

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

(a) determine o vértice;

(b) determine o valor máximo da função;

(c) verifique se o gráfico corta o eixo x .

9. Uma bola é lançada verticalmente, e sua altura (em metros) após t segundos é dada por:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

(a) Determine a altura máxima atingida.

(b) Em que instante isso ocorre?

(c) Determine quando a bola atinge o solo.

16.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- função afim e interpretação geométrica da reta;
- coeficiente angular, coeficiente linear e zero da função;
- taxa de variação, equação da reta por dois pontos e sinal da função afim;
- função quadrática e parábolas;
- discriminante e raízes;
- formas fatorada e canônica, vértice, concavidade e eixo de simetria;
- crescimento, decrescimento, imagem, sinal e valores máximos ou mínimos.

CAPÍTULO 17

Funções Clássicas

Motivação 17.1

Nem todos os fenômenos podem ser descritos apenas por retas ou parábolas. Algumas situações envolvem crescimento acelerado, distâncias absolutas ou comportamentos diferentes em certos intervalos. As **funções modulares, exponenciais e definidas por partes** surgem justamente para representar esses casos.

Além de suas fórmulas, o aspecto mais importante dessas funções é a interpretação gráfica. Compreender deslocamentos, reflexões e transformações permite analisar rapidamente o comportamento de uma função sem depender apenas de cálculos extensos.

Contexto histórico 17.1

O desenvolvimento dessas funções acompanhou necessidades práticas da ciência e da matemática. A função modular apareceu naturalmente em problemas envolvendo distância e erro absoluto, enquanto as funções exponenciais ganharam destaque no estudo de crescimento populacional, juros compostos e fenômenos físicos.

Já as funções definidas por partes surgiram para modelar situações em que diferentes regras atuam em diferentes intervalos, algo muito comum em economia, computação e ciências aplicadas.

Com o avanço da geometria analítica e da interpretação gráfica, tornou-se possível estudar transformações de gráficos de maneira sistemática, permitindo compreender famílias inteiras de funções a partir de modelos básicos conhecidos.

17.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos funções afins e quadráticas, cujos gráficos possuem formas relativamente simples: retas e parábolas. Entretanto, muitos fenômenos não seguem esse comportamento.

Em alguns casos, o crescimento ocorre de maneira extremamente rápida, como em juros compostos e crescimento populacional. Em outros, o mais importante não é o sinal do número, mas sua distância até um ponto, como acontece em expressões envolvendo módulo.

Também existem situações em que uma única fórmula não consegue descrever todo o comportamento da função. Nesses casos, diferentes regras passam a valer em diferentes intervalos.

Mais do que memorizar fórmulas, o objetivo deste capítulo é desenvolver leitura gráfica e interpretação. A ideia central será compreender como cada função se comporta, como seus gráficos se transformam e quais características podem ser identificadas visualmente.

Ao longo do capítulo, veremos funções modulares, exponenciais, logarítmicas e definidas por partes, além das principais transformações gráficas utilizadas na análise de funções.

17.2 Função modular

Definição

A função modular é dada por

$$f(x) = |x|.$$

Por definição,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

O módulo representa a distância entre um número e a origem na reta real. Por isso:

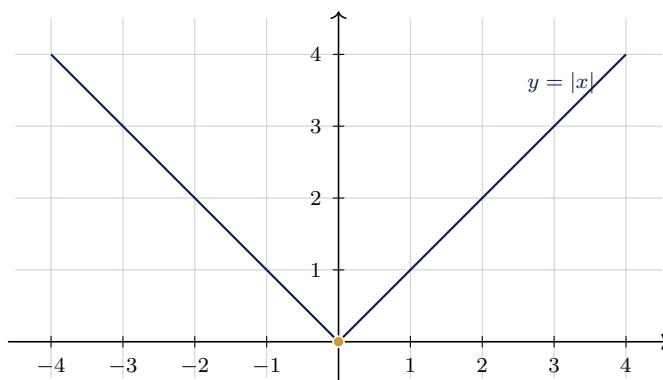
$$|3| = 3 \quad \text{e} \quad |-3| = 3.$$

Domínio, imagem e simetria

- Domínio: $\mathbb{R}$.

- Imagem: $[0, +\infty)$.
- A função modular é **par**, pois $|-x| = |x|$. Logo, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y .

Gráfico



Equações e inequações com módulo

Resolver expressões com módulo significa analisar distâncias.

Exemplo

Resolva $|x - 2| = 3$.

A distância entre x e 2 deve ser igual a 3. Assim:

$$x - 2 = 3$$

$$x - 2 = -3.$$

Logo, $x = 5$ ou $x = -1$.

Exemplo

Resolva $|x - 2| \leq 3$.

Isso significa que a distância até 2 deve ser menor ou igual a 3, ou seja, $-3 \leq x - 2 \leq 3$. Somando 2, obtemos $-1 \leq x \leq 5$.

17.3 Função exponencial

Enquanto a função modular está associada à ideia de distância, as funções exponenciais aparecem em situações de crescimento ou decaimento acelerado.

Fenômenos como juros compostos, crescimento populacional, radioatividade e propagação de informações frequentemente apresentam comportamento exponencial.

Definição

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial de base a é definida por

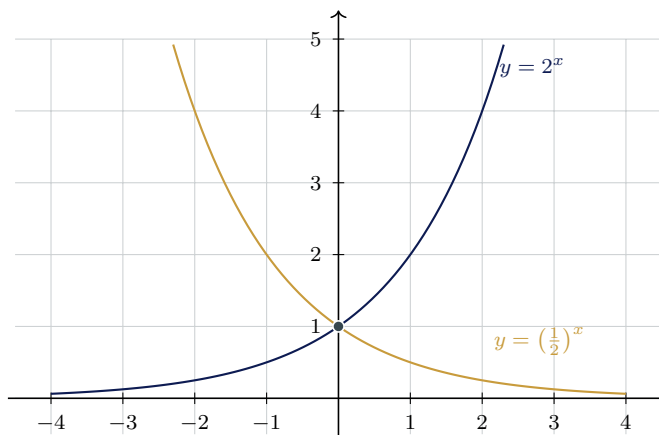
$$f(x) = a^x.$$

Propriedades básicas

- Domínio: $\mathbb{R}$.
- Imagem: $(0, +\infty)$.
- O gráfico sempre passa pelo ponto $(0, 1)$, pois $a^0 = 1$.
- Se $a > 1$, a função é crescente.
- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Observe também que $a^x > 0$ para qualquer valor real de x .

Gráfico



17.4 Função logarítmica

A função logarítmica surge como inversa da exponencial.

Enquanto a exponencial responde $a^x = b$, o logaritmo responde à pergunta “qual expoente transforma a em b ?”.

Definição

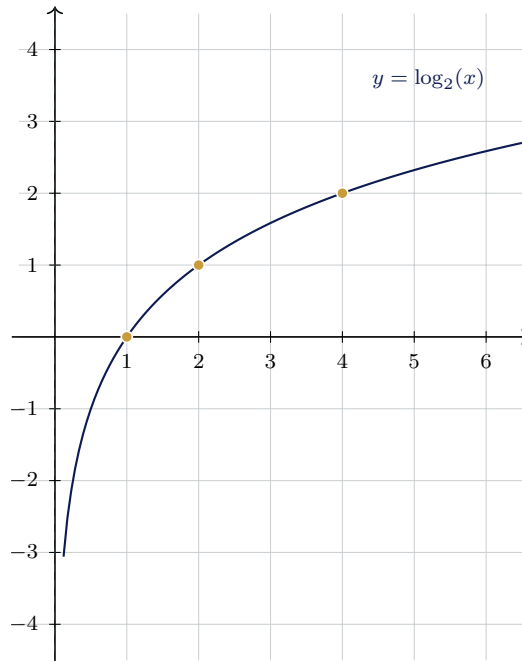
Para $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos $f(x) = \log_a(x)$. Isso significa que

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Domínio, imagem e pontos notáveis

- Domínio: $(0, +\infty)$.
- Imagem: $\mathbb{R}$.
- O gráfico passa por $(1, 0)$, pois $\log_a(1) = 0$.
- Se $a > 1$, a função é crescente; se $0 < a < 1$, é decrescente.

Gráfico



17.5 Funções definidas por partes

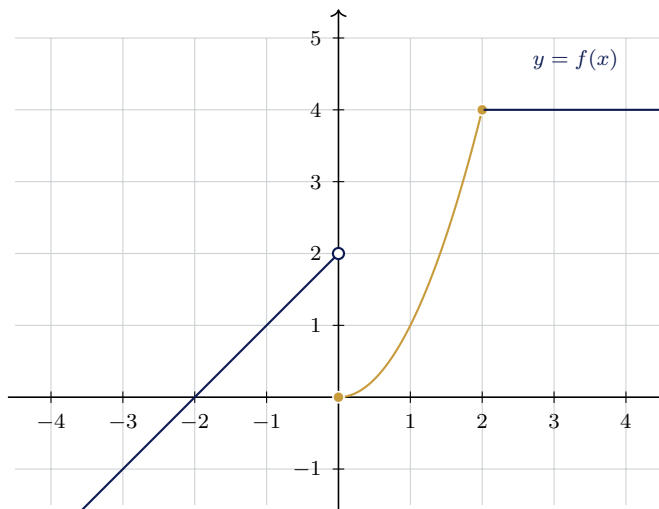
Em muitos problemas, uma única expressão não consegue descrever todo o comportamento da função. Nesses casos, usamos funções definidas por partes.

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4, & x > 2. \end{cases}$$

Cada regra atua apenas em determinado intervalo.

Gráfico



17.6 Transformações gráficas

Uma das ideias mais importantes no estudo de funções é perceber que muitos gráficos podem ser obtidos a partir de transformações simples de gráficos conhecidos.

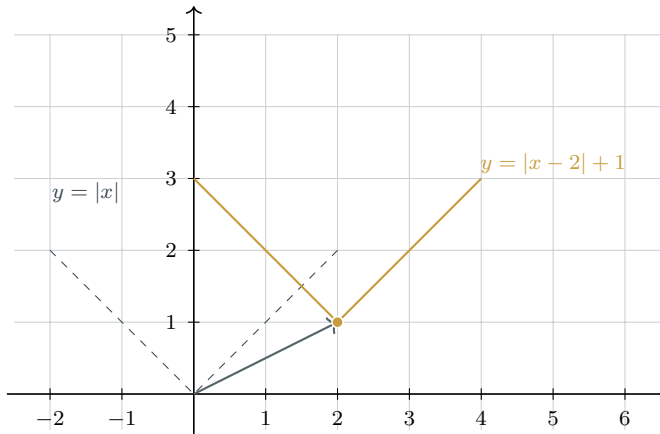
Transformações básicas

A partir do gráfico $y = f(x)$, temos:

- $y = f(x) + k$: desloca o gráfico verticalmente;
- $y = f(x - h)$: desloca o gráfico horizontalmente;
- $y = -f(x)$: reflexão em relação ao eixo x ;
- $y = f(-x)$: reflexão em relação ao eixo y ;
- $y = cf(x)$: estica ou comprime verticalmente o gráfico.

Exemplo

O gráfico de $y = |x - 2| + 1$ é obtido deslocando o gráfico de $y = |x|$ duas unidades para a direita e uma unidade para cima.



17.7 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Para cada função abaixo:

- determine o domínio;
- determine a imagem;
- diga se a função é crescente, decrescente ou nenhuma das duas.

(a) $f(x) = |x|$

(b) $g(x) = 3^x$

17. FUNÇÕES CLÁSSICAS

(c) $h(x) = \log_2(x)$

2. Resolva: $|x - 4| = 5$.

3. Resolva: $|2x + 3| = 9$.

4. Resolva as inequações:

(a) $|x + 1| \leq 3$

(b) $|3x - 2| > 4$

5. Determine os zeros das funções:

(a) $f(x) = |x| - 6$

(b) $g(x) = 2^x - 16$

(c) $h(x) = \log_5(x) - 1$

6. Complete a tabela:

x	-2	-1	0	1	2
3^x					

7. Complete a tabela:

x	1	3	9	27
$\log_3(x)$				

8. Considere:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1, \\ 5, & x \geq 1. \end{cases}$$

Calcule:

$$f(-2), \quad f(0), \quad f(1), \quad f(4).$$

9. Associe cada transformação ao seu efeito geométrico.

(a) $y = f(x) + 2$

(b) $y = f(x - 4)$

(c) $y = -f(x)$

(d) $y = f(-x)$

- I. reflexão em relação ao eixo y ;
- II. deslocamento horizontal para a direita;
- III. reflexão em relação ao eixo x ;
- IV. deslocamento vertical para cima.

Aplicação

10. Uma população de bactérias é modelada por:

$$P(t) = 200 \cdot 2^t,$$

em que t representa o tempo em horas.

- (a) Determine $P(0)$;
 - (b) determine $P(4)$;
 - (c) após quantas horas a população será igual a 3200?
11. O valor de um equipamento sofre desvalorização anual segundo:

$$V(t) = 50000 \cdot (0,9)^t.$$

- (a) O valor cresce ou decresce com o tempo?
 - (b) Determine o valor após 3 anos.
 - (c) O valor permanecerá acima de R\$ 30000 após 5 anos?
12. A distância entre um carro e um posto é dada por:

$$d(x) = |x - 8|,$$

em que x representa a posição do carro em quilômetros.

- (a) Determine a distância quando $x = 2$;
 - (b) determine a distância quando $x = 13$;
 - (c) determine as posições em que a distância é igual a 5.
13. Resolva:

$$2^x = 64.$$

17. FUNÇÕES CLÁSSICAS

14. Resolva:

$$\log_3(x) = 4.$$

15. Resolva:

$$\log_2(x - 1) = 3.$$

16. O preço de uma corrida é dado por:

$$P(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 3, \\ 10 + 3(x - 3), & x > 3, \end{cases}$$

em que x representa a distância em quilômetros.

(a) Determine $P(2)$;

(b) determine $P(3)$;

(c) determine $P(7)$.

17. Descreva as transformações sofridas pelo gráfico de:

$$y = |x|$$

para obter:

$$y = -|x - 1| + 4.$$

Domínio

18. Resolva:

$$|3x - 1| = |x + 5|.$$

19. Resolva:

$$|x - 2| + |x + 1| = 7.$$

20. Resolva:

$$2^{x+2} = 32.$$

21. Resolva:

$$5^{2x-1} = 125.$$

22. Resolva:

$$\log_2(x - 2) + \log_2(x - 6) = 4.$$

23. Resolva:

$$\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 2.$$

24. Determine domínio e imagem:

$$f(x) = |x+3| - 2.$$

25. Determine domínio e imagem:

$$g(x) = 3^{x-2} + 1.$$

26. Determine domínio e imagem:

$$h(x) = \log_2(x-5) + 4.$$

27. Esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 3, \\ 5, & x > 3. \end{cases}$$

28. Uma substância radioativa perde metade de sua massa a cada 6 horas.

Sabendo que a massa inicial é 640 g, determine:

(a) a função que modela o problema;

(b) a massa após 18 horas;

(c) após quanto tempo a massa será 80 g.

Coroação

29. Resolva:

$$|x^2 - 9| = 0.$$

30. Resolva:

$$|x-4| + |x+2| = 10.$$

31. Resolva:

$$2^x + 2^{x+2} = 40.$$

32. Resolva:

$$\log_2(x) + \log_2(x - 4) = 4.$$

33. Resolva:

$$\log_3(x + 1) = \log_9(3x - 6).$$

34. Considere:

$$f(x) = |x - 1| + |x + 3|.$$

- (a) Escreva a função sem módulo, por intervalos;
- (b) determine o valor mínimo da função;
- (c) resolva:

$$f(x) = 9.$$

35. Determine todos os valores reais de x tais que:

$$3^{|x-2|} = 27.$$

36. Resolva:

$$\log_2(|x - 4|) = 2.$$

37. Considere:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -2, \\ x^2 - 1, & -2 \leq x \leq 2, \\ 2x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

- (a) Determine $f(-4)$, $f(0)$ e $f(3)$;
- (b) determine os zeros da função;
- (c) faça um esboço do gráfico.

17.8 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- função modular e interpretação geométrica do módulo;
- equações e inequações modulares;
- função exponencial;

- crescimento e decaimento exponencial;
- propriedades básicas das exponenciais;
- função logarítmica;
- relação entre logaritmos e exponenciais;
- domínio e imagem da função logarítmica;
- resolução de equações logarítmicas e exponenciais;
- funções definidas por partes;
- interpretação gráfica de diferentes intervalos;
- transformações gráficas;
- deslocamentos horizontais e verticais;
- reflexões em relação aos eixos coordenados;
- compressões e esticamentos gráficos.

CAPÍTULO 18

Logaritmos

Motivação 18.1

Em muitos problemas matemáticos, a incógnita aparece no expoente. Situações envolvendo crescimento populacional, juros compostos, intensidade sonora, radioatividade e escalas científicas frequentemente conduzem a equações desse tipo.

Os **logaritmos** surgem justamente para lidar com essas situações. Eles permitem transformar relações exponenciais em expressões algébricas mais simples, além de fornecer uma maneira eficiente de comparar grandezas muito grandes ou muito pequenas.

Mais do que uma técnica de cálculo, os logaritmos representam uma nova forma de interpretar crescimento, escalas e comportamento funcional.

Contexto histórico 18.1

No início do século XVII, cálculos envolvendo multiplicações, divisões e potências eram extremamente trabalhosos, especialmente em astronomia e navegação. Para simplificar essas contas, o matemático escocês John Napier desenvolveu os primeiros estudos sobre logaritmos.

A ideia central era transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações, tornando os cálculos muito mais rápidos. Pouco depois, Henry Briggs aperfeiçoou o sistema e popularizou os logaritmos em base 10, que passaram a ser amplamente utilizados em tabelas matemáticas.

Durante séculos, engenheiros, físicos e navegadores utilizaram tabelas logarítmicas e réguas de cálculo para realizar operações complexas antes do surgimento das calculadoras eletrônicas.

Atualmente, os logaritmos continuam fundamentais em diversas áreas da ciência, especialmente em modelos exponenciais, escalas de intensidade e análise de crescimento.

18.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos potências, expoentes fracionários e funções exponenciais. Em todos esses casos, o expoente desempenhava um papel central no comportamento da expressão.

Entretanto, algumas equações não podem ser resolvidas apenas observando diretamente as potências. Por exemplo:

$$2^x = 7.$$

Sabemos que $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$, mas o valor exato de x não é inteiro. Surge então a seguinte pergunta:

Qual expoente devemos aplicar na base 2 para obter 7?

O logaritmo nasce exatamente dessa ideia.

De forma geral, $\log_a(x)$ representa o expoente necessário para transformar a em x .

Além do aspecto algébrico, os logaritmos possuem forte interpretação gráfica e funcional. Eles aparecem associados às funções exponenciais e permitem descrever fenômenos de crescimento, escalas e variações muito rápidas.

18.2 Definição de logaritmo

Definição

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Ou seja, $\log_a(x)$ representa o expoente ao qual devemos elevar a base a para obter x .

Interpretação

A leitura $\log_2(8) = 3$ significa $2^3 = 8$.

Da mesma forma, $\log_5(25) = 2$ equivale a $5^2 = 25$.

Assim, o logaritmo funciona como um processo inverso da potenciação.

Condições de existência

Para que $\log_a(x)$ esteja definido nos números reais, é necessário que $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$.

Essas condições são fundamentais e aparecerão constantemente ao resolver equações e inequações logarítmicas.

Exemplos

Temos $\log_2(32) = 5$, pois $2^5 = 32$; $\log_{10}(1) = 0$, pois $10^0 = 1$; e $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Logaritmos importantes

Vale $\log_a(1) = 0$, pois $a^0 = 1$. Além disso, $\log_a(a) = 1$, pois $a^1 = a$.

18.3 Propriedades dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos são consequência direta das propriedades das potências.

Logaritmo do produto

$$\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N).$$

Logaritmo do quociente

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N).$$

Logaritmo da potência

$$\log_a(M^k) = k \log_a(M).$$

Interpretação das propriedades

Essas relações mostram que:

- multiplicações transformam-se em somas;

- divisões transformam-se em subtrações;
- potências transformam-se em multiplicações.

Historicamente, foi justamente essa característica que tornou os logaritmos tão importantes antes das calculadoras.

Exemplos

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2(8) + \log_2(4) = 3 + 2 = 5.$$

$$\log_3\left(\frac{81}{3}\right) = \log_3(81) - \log_3(3) = 4 - 1 = 3.$$

$$\log_2(16^3) = 3 \log_2(16) = 3 \cdot 4 = 12.$$

18.4 Mudança de base

Em muitos casos, é conveniente trocar a base do logaritmo.

Fórmula

Para $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$, vale

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

Exemplo

$$\log_2(7) = \frac{\log(7)}{\log(2)}.$$

Essa fórmula permite calcular logaritmos utilizando calculadoras comuns, que normalmente trabalham com $\log$ (base 10) ou $\ln$ (base e).

18.5 Função logarítmica

Definição

A função logarítmica é dada por

$$f(x) = \log_a(x),$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Ela é a função inversa da exponencial $g(x) = a^x$.

Domínio e imagem

- **Domínio:** $(0, +\infty)$ (o logaritmo só está definido para números reais positivos).
- **Imagem:** $\mathbb{R}$ (qualquer número real pode ser obtido como resultado de um logaritmo).

Pontos importantes

O gráfico sempre passa por $(1, 0)$, pois $\log_a(1) = 0$.

Também passa por $(a, 1)$, pois $\log_a(a) = 1$.

Crescimento

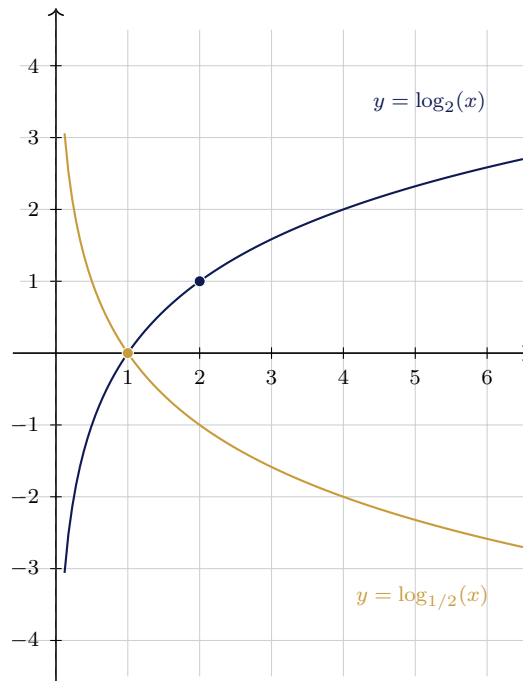
- Se $a > 1$, a função é **crescente**.
- Se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.

Interpretação gráfica

Observe que o gráfico da função logarítmica aproxima-se do eixo y , mas nunca o toca. Isso ocorre porque $\log_a(x)$ não existe para $x \leq 0$.

Além disso, o crescimento da função é relativamente lento quando comparado ao da função exponencial.

Gráficos



18.6 Equações logarítmicas

Ideia geral

Resolver uma equação logarítmica significa encontrar valores que satisfaçam simultaneamente:

- a igualdade proposta;
- as condições de existência dos logaritmos.

Organizando a resolução

1. determinar as condições de existência;
2. aplicar propriedades, quando necessário;
3. transformar em equação exponencial;
4. verificar as soluções obtidas.

Exemplo 1

Resolva $\log_2(x - 1) = 3$.

Solução

A condição de existência é $x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$.

Pela definição, $x - 1 = 2^3$, logo $x - 1 = 8$ e $x = 9$.

Como $9 > 1$, a solução é válida.

Exemplo 2

Resolva $\log_3(x) + \log_3(x - 2) = 2$.

Solução

As condições de existência são $x > 0$ e $x - 2 > 0$, logo $x > 2$.

Aplicando a propriedade do produto, $\log_3(x(x - 2)) = 2$, então $x(x - 2) = 3^2$ e, assim, $x^2 - 2x - 9 = 0$. Resolvendo,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}.$$

Como $x > 2$, resta apenas $x = 1 + \sqrt{10}$.

18.7 Inequações logarítmicas

A resolução depende do comportamento da função logarítmica.

Caso $a > 1$

Se $a > 1$, a função é crescente. Assim,

$$\log_a(u) \leq \log_a(v) \iff u \leq v.$$

Caso $0 < a < 1$

Se $0 < a < 1$, a função é decrescente. Nesse caso,

$$\log_a(u) \leq \log_a(v) \iff u \geq v.$$

Exemplo

Resolva:

$$\log_2(x) \geq 1.$$

Solução

Condição: $x > 0$.

Como $2 > 1$, a função é crescente.

Logo:

$$x \geq 2^1$$

$$x \geq 2.$$

18.8 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule:

(a) $\log_2(32)$

(b) $\log_3(1)$

(c) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$

2. Simplifique:

(a) $\log_2(8 \cdot 4)$

(b) $\log_3\left(\frac{81}{3}\right)$

(c) $\log_2\left(\frac{x^2}{4}\right)$, com $x > 0$

Aplicação

3. Resolva:

(a) $\log_2(x - 3) = 4$

(b) $\log_5(2x) = \log_5(10)$

4. Resolva:

$$\log_2(x) + \log_2(x - 1) = 3.$$

Domínio

5. Determine o domínio natural:

(a) $f(x) = \log_3(2x - 1)$

(b) $g(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

6. Resolva:

$$\log_2(x) \geq 1.$$

Coroação

7. Resolva:

$$\log_{1/2}(x) \leq -2.$$

8. Mostre que $\log_a(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

18.9 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- definição e interpretação dos logaritmos;
- condições de existência;
- propriedades operatórias;
- mudança de base;
- função logarítmica e comportamento gráfico;
- equações e inequações logarítmicas.

CAPÍTULO 19

Exercícios da Parte IV: Relações e Funções

Uma função pode ser apresentada por fórmula, tabela, gráfico ou descrição verbal. Ao passar de uma representação para outra, preserve o que realmente define a relação: domínio, valores de saída e modo de variação. Nos gráficos, zeros, interceptos e vértices são referências, não enfeites.

19.1 Exercícios Propostos

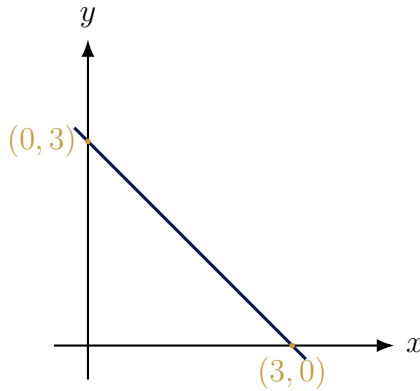
Fundamentos

1. Seja $f(x) = 2x - 3$. Calcule: (a) $f(0)$; (b) $f(5)$; (c) resolva $f(x) = 7$.
2. Seja $g(x) = x^2 - 4x$. Determine as raízes de $g(x)$.
3. Determine o domínio real de: (a) $h(x) = \sqrt{x - 2}$; (b) $p(x) = \frac{1}{x + 1}$.
4. Determine $f \circ g$ para $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x$.
5. Seja $f(x) = x^2 - 1$. Calcule: (a) $f(-2)$; (b) $f(3)$; (c) resolva $f(x) = 0$.
6. Determine se a relação R em $\mathbb{R}$ definida por $aRb \iff a - b \in \mathbb{Z}$ é reflexiva e simétrica.

Aplicação

7. Uma função é dada por $f(x) = |x - 2|$. Calcule $f(-1)$, $f(2)$ e $f(7)$.
8. Encontre a função inversa de $f(x) = 3x - 6$.
9. Determine a lei da função afim que passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(5, 0)$.

10. (Com desenho) Esboce o gráfico de $y = -x + 3$ e determine suas interseções com os eixos.



11. Uma parábola tem equação $y = x^2 - 4x + 1$. Determine o vértice e o valor mínimo.
12. Determine os pontos de interseção do gráfico de $y = x^2 - 4x + 1$ com o eixo x .
13. Uma função custo é $C(x) = 50 + 8x$ (em reais), onde x é o número de unidades produzidas. Determine $C(0)$ e interprete seu significado.

Domínio

14. Resolva a inequação: $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.
15. Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é crescente e decrescente.
16. Se $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, resolva $f(x) = 2$.
17. Determine o domínio e a imagem de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
18. Resolva em $\mathbb{R}$: $|x - 3| \leq 2$.

Coroação

19. (Desafio) Seja $f(x) = ax + b$ e suponha que $f(2) = 7$ e $f(-1) = 1$. Determine a e b .
20. (Desafio) Encontre todos os x tais que $|x^2 - 4| < 3$.
21. (Desafio) Seja $f(x) = x^2 + px + q$ com raízes 2 e -5 . Determine p e q .

PARTE V • CONTAGEM E SEQUÊNCIAS

CAPÍTULO 20

Análise Combinatória

Motivação 20.1

Quando o número de possibilidades é grande, listar uma a uma deixa de ser viável. A análise combinatória ensina a **contar sem enumerar**, decompondo uma situação em escolhas, etapas ou casos. Mais importante do que reconhecer o nome de uma fórmula é compreender o que está sendo contado e quando dois resultados devem ser considerados diferentes.

Contexto histórico 20.1

Problemas de contagem aparecem desde jogos e calendários, mas o estudo sistemático de permutações e combinações ganhou força com o desenvolvimento da probabilidade e da álgebra. Uma conexão clássica é o binômio de Newton: os coeficientes $\binom{n}{k}$ contam escolhas e, ao mesmo tempo, surgem na expansão de $(a + b)^n$.

20.1 Introdução

Contar não é apenas obter um número grande. É decidir com precisão o que caracteriza cada possibilidade. Escolher três estudantes para uma comissão, por exemplo, é diferente de escolher três estudantes para os cargos de presidente, vice-presidente e secretário. No primeiro caso, trocar a ordem dos nomes não cria uma nova comissão; no segundo, trocar os cargos produz outro resultado.

Ao longo do capítulo, quatro ideias aparecerão repetidamente:

- separar uma escolha em etapas sucessivas;
- dividir o problema em casos que não se sobrepõem;

- perceber se a ordem altera o resultado;
- identificar se um elemento pode ser escolhido mais de uma vez.

As fórmulas de permutação, arranjo e combinação nascerão dessas ideias.

20.2 Princípios de contagem

20.2.1 Princípio aditivo

Se uma escolha pode ser feita por m maneiras de um primeiro tipo **ou** por n maneiras de um segundo tipo, e nenhum resultado pertence aos dois tipos, então há

$$m + n$$

possibilidades.

Por exemplo, se uma estante possui cinco romances e quatro livros de poesia, podemos escolher um romance ou um livro de poesia de

$$5 + 4 = 9$$

maneiras.

Se os casos tiverem resultados em comum, a simples soma contará a interseção duas vezes. Nesse caso, será necessário separar melhor os casos ou corrigir a sobreposição.

20.2.2 Princípio fundamental da contagem

Quando uma escolha é feita em etapas sucessivas, multiplicamos o número de possibilidades de cada etapa.

Proposição 20.1 (Princípio fundamental da contagem). *Se uma primeira etapa pode ser realizada de m maneiras e, para cada uma delas, uma segunda etapa pode ser realizada de n maneiras, então o processo completo pode ser realizado de*

$$m \cdot n$$

maneiras.

O diagrama de árvore torna essa multiplicação visível. Com três camisetas e duas calças, cada camiseta pode ser acompanhada por qualquer uma das duas calças.

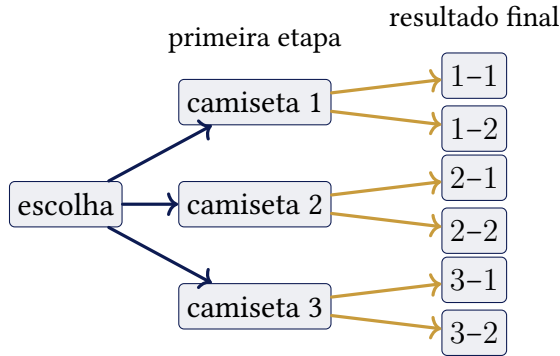


Figura 20.1: Três escolhas na primeira etapa e duas na segunda produzem $3 \cdot 2 = 6$ resultados.

O mesmo raciocínio vale para qualquer número de etapas. Uma senha com duas letras seguidas de três algarismos, permitindo repetição, pode ser formada de

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3$$

maneiras.

20.2.3 Contagem pelo complemento

Às vezes é mais simples contar todos os resultados e retirar os que não servem. Se U é o conjunto de todas as possibilidades e A é a condição desejada, então

$$|A| = |U| - |A^c|.$$

Para contar senhas de quatro algarismos com pelo menos um 7, podemos calcular

$$10^4 - 9^4.$$

O primeiro termo conta todas as senhas; o segundo, aquelas em que nenhum algarismo é 7.

20.3 Fatorial

Para um inteiro $n \geq 1$, definimos

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Também definimos $0! = 1$. Essa convenção preserva relações como

$$n! = n(n-1)!$$

inclusive quando $n = 1$.

O fatorial cresce rapidamente. Por isso, antes de expandir tudo, é melhor simplificar fatores comuns. Por exemplo,

$$\frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9.$$

20.4 Permutações

20.4.1 Permutação simples

Permutar n elementos distintos é colocá-los em uma ordem. Para a primeira posição há n escolhas; para a segunda, $n-1$; e assim sucessivamente. Portanto,

$$P_n = n!.$$

As quatro letras A, B, C e D podem ser ordenadas de

$$4! = 24$$

maneiras.

20.4.2 Permutação com repetição

Se alguns elementos são iguais, a permutação simples conta várias vezes a mesma disposição. Se há n_1 elementos iguais de um tipo, n_2 de outro, e assim por diante, com

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,$$

então

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

Na palavra **ARARA**, as cinco posições seriam contadas por $5!$, mas trocar os três A entre si ou os dois R entre si não cria um novo anagrama. Logo,

$$\frac{5!}{3!2!} = 10.$$

20.4.3 Permutação circular

Em uma fila, há uma primeira posição bem definida. Em uma mesa redonda, girar todos os participantes ao mesmo tempo não altera a disposição relativa. Fixamos uma pessoa como referência e ordenamos as demais ao redor dela:

$$P_n^{\text{circ}} = (n - 1)!.$$

Assim, seis pessoas podem ocupar uma mesa redonda de

$$5! = 120$$

maneiras, considerando iguais as disposições obtidas apenas por rotação. Uma reflexão, porém, continua sendo outra ordem, salvo indicação contrária.

20.5 Arranjos

Um **arranjo simples** escolhe p elementos entre n e também leva em conta a ordem. Pelo princípio fundamental,

$$A_{n,p} = n(n - 1) \cdots (n - p + 1),$$

ou, de forma compacta,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Em uma turma com dez estudantes, escolher presidente e vice-presidente dá

$$A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$$

resultados, pois os cargos são diferentes.

20.5.1 Arranjos com repetição

Se cada uma das p posições pode receber qualquer uma das n opções, inclusive uma opção já usada, há

$$n^p$$

seqüências. É o caso de códigos, senhas e placas quando a repetição é permitida.

Uma placa no formato LLL-DDDD pode ser formada de

$$26^3 \cdot 10^4$$

maneiras.

20.6 Combinações

Uma **combinação simples** escolhe p elementos entre n sem considerar a ordem. Se primeiro contarmos as escolhas ordenadas, cada grupo será contado $p!$ vezes, uma para cada ordem interna. Portanto,

$$A_{n,p} = \binom{n}{p} p!,$$

e assim

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Uma comissão de três pessoas escolhida entre dez pode ser formada de

$$\binom{10}{3} = 120$$

maneiras.

20.6.1 Duas propriedades importantes

Escolher os p elementos que entram equivale a escolher os $n - p$ que ficam de fora. Por isso,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}.$$

Também vale a relação de Pascal:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}.$$

Para entendê-la, fixamos um elemento. As escolhas de p elementos se dividem em dois casos disjuntos: as que não contêm o elemento fixado e as que o contêm.

20.6.2 Combinação com repetição

Quando escolhemos p objetos entre n tipos e um mesmo tipo pode aparecer várias vezes, contamos multiconjuntos. A quantidade é

$$\boxed{CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}}.$$

Uma interpretação útil é distribuir p objetos idênticos em n grupos. Representamos os objetos por estrelas e usamos $n - 1$ barras como separadores.



Figura 20.2: A sequência $** \mid * \mid ***$ representa uma distribuição de seis objetos em três grupos.

Distribuir seis chocolates idênticos entre três pessoas, permitindo que alguém não receba nenhum, corresponde a ordenar seis estrelas e duas barras:

$$\binom{6 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{8}{2} = 28.$$

20.7 Binômio de Newton

Na expansão de $(a + b)^n$, cada termo é obtido escolhendo, em cada um dos n fatores, se tomamos a ou b . Para produzir $a^{n-k}b^k$, escolhemos os k fatores que fornecerão b . Há $\binom{n}{k}$ maneiras de fazer isso. Logo,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exemplo

No termo geral de $(2x - 1)^5$,

$$\binom{5}{k} (2x)^{5-k} (-1)^k,$$

o expoente de x é $5 - k$. Para obter x^3 , precisamos de $k = 2$. O coeficiente é

$$\binom{5}{2} 2^3 (-1)^2 = 80.$$

20.8 Restrições e divisão em casos

Restrições alteram o número de opções de uma ou mais etapas. Em vez de aplicar diretamente uma fórmula, é necessário incorporar a condição à contagem.

Para formar números de quatro algarismos distintos, o primeiro algarismo não pode ser zero. Há nove escolhas para ele. Depois de escolhê-lo, restam nove dígitos para a segunda posição, oito para a terceira e sete para a quarta:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Quando uma condição cria possibilidades de naturezas diferentes, dividimos a contagem em casos disjuntos e somamos os resultados. Quando a condição tem a forma “pelo menos um”, a contagem pelo complemento costuma ser mais curta.

20.9 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule:

(a) $7!$;

(b) $\frac{8!}{6!}$;

(c) $\binom{9}{2}$.

2. Quantos anagramas diferentes tem a palavra **BANANA**?

Aplicação

3. Em uma turma com doze estudantes, de quantas formas podemos escolher um representante e um suplente?

4. De quantas formas podemos escolher cinco cartas de um baralho padrão de 52 cartas?

Domínio

5. Quantas senhas de seis caracteres podem ser formadas com letras (A–Z) e dígitos (0–9), permitindo repetição?

6. Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados com os dígitos de 0 a 9 e sem começar por zero?

Coroação

7. Determine o coeficiente de x^4 em $(x + 2)^7$.
8. Quantos subconjuntos possui um conjunto com oito elementos? Inclua o conjunto vazio.
9. De quantas maneiras sete pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular, considerando iguais as disposições que diferem apenas por rotação?
10. Quantas sequências de cinco algarismos possuem pelo menos uma ocorrência do algarismo 7? A repetição é permitida e o primeiro algarismo pode ser zero.
11. De quantas maneiras oito doces idênticos podem ser distribuídos entre quatro crianças, permitindo que uma criança não receba nenhum doce?
12. Em uma malha, um caminho parte de $(0, 0)$ e chega a $(5, 4)$ usando apenas passos de uma unidade para a direita ou para cima. Quantos caminhos diferentes existem?

20.10 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- princípios aditivo e multiplicativo e contagem pelo complemento;
- fatorial e permutações simples, com repetição e circulares;
- arranjos simples e com repetição;
- combinações simples, propriedades e combinações com repetição;
- interpretação combinatória do binômio de Newton;
- restrições e divisão da contagem em casos.

CAPÍTULO 21

Probabilidade

Motivação 21.1

Em muitas situações precisamos tomar decisões sem ter certeza do resultado: um experimento pode dar certo ou não, um dado pode cair em qualquer face, uma peça pode sair defeituosa ou perfeita. A **probabilidade** é a linguagem matemática para medir o quanto um evento é plausível, sempre a partir de um modelo bem definido. Ela não elimina a incerteza; organiza o que sabemos sobre ela.

Contexto histórico 21.1

O estudo da probabilidade ganhou forma ao analisar jogos de azar nos séculos XVII e XVIII. Pascal e Fermat discutiram problemas de apostas; depois, Bernoulli e Laplace consolidaram métodos e interpretações. Hoje, a probabilidade aparece em estatística, ciência de dados, finanças, medicina, engenharia e em qualquer contexto em que há incerteza.

21.1 Introdução

Um cálculo de probabilidade começa antes da fórmula. Primeiro descrevemos o experimento e os resultados que ele pode produzir; depois, identificamos quais desses resultados formam o evento de interesse; por fim, atribuímos probabilidades de acordo com as condições do problema.

Essas três partes precisam estar de acordo. Em um dado ideal, por exemplo, as seis faces podem ser tratadas como igualmente prováveis. Em um dado viciado, o espaço amostral continua sendo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mas já não podemos supor que cada face tenha probabilidade $\frac{1}{6}$.

Neste capítulo começaremos pelos modelos finitos e equiprováveis. Em seguida, veremos como a informação disponível modifica as probabilidades, como reconhecer independência e como combinar diferentes caminhos possíveis em experimentos realizados por etapas.

21.2 Experimentos, resultados e eventos

Chamamos de **experimento aleatório** um procedimento cujo resultado não pode ser previsto com certeza antes de sua realização, embora possamos descrever os resultados possíveis. Lançar um dado, retirar uma peça de uma caixa e observar o tempo até uma lâmpada falhar são exemplos.

O conjunto de todos os resultados possíveis é o **espaço amostral**, geralmente indicado por Ω . Um **evento** é qualquer subconjunto de Ω ; ele ocorre quando o resultado observado pertence a esse subconjunto.

No lançamento de um dado,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

O evento $A = \text{“sair número par”}$ é $A = \{2, 4, 6\}$, enquanto o evento $B = \text{“sair número maior que 4”}$ é $B = \{5, 6\}$.

Entre os eventos, destacam-se:

- o evento impossível $\emptyset$;
- o evento certo Ω ;
- o complementar $A^c = \Omega \setminus A$, formado pelos resultados em que A não ocorre.

21.2.1 A descrição do resultado importa

Se um dado é lançado duas vezes, o par $(2, 5)$ é diferente de $(5, 2)$, pois informa a ordem dos lançamentos. Um espaço amostral adequado é

$$\Omega = \{(i, j); i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

com $|\Omega| = 36$. Escolher corretamente a unidade de resultado evita muitos erros de contagem.

21.3 Atribuição de probabilidades

A cada evento A associamos um número $P(A)$ que satisfaz

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = 0.$$

Quanto mais próximo de 1, mais provável é o evento; quanto mais próximo de 0, menos provável.

21.3.1 Modelo equiprovável

Quando Ω é finito e todos os resultados elementares têm a mesma chance, usamos a probabilidade clássica:

Proposição 21.1 (Probabilidade clássica). *Se os resultados de Ω são equiprováveis e $A \subseteq \Omega$, então*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

No dado ideal, há seis resultados equiprováveis e três deles são pares. Portanto,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A fórmula não deve ser aplicada apenas porque conseguimos contar os casos: é necessário que os resultados considerados sejam realmente equiprováveis.

21.3.2 Complemento

Como A e A^c dividem o espaço amostral sem sobreposição,

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Logo,

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Essa relação é especialmente útil em perguntas como “pelo menos um”, nas quais pode ser mais simples calcular primeiro a probabilidade de nenhum.

Exemplo

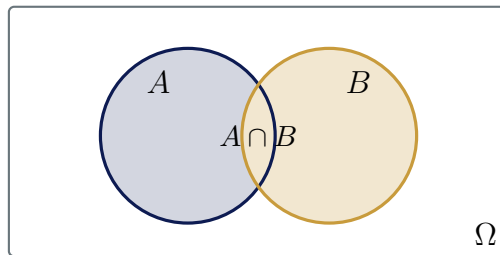
Uma moeda justa é lançada quatro vezes. A probabilidade de sair pelo menos uma cara é

$$1 - P(\text{nenhuma cara}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}.$$

21.4 Operações entre eventos

Dados eventos A e B :

- $A \cap B$ ocorre quando A e B ocorrem juntos;
- $A \cup B$ ocorre quando pelo menos um deles ocorre;
- $A \setminus B$ ocorre quando A ocorre, mas B não.



$A \cup B$ ocupa as duas regiões circulares.

Figura 21.1: Interseção e união de dois eventos no espaço amostral.

Ao somar $P(A)$ e $P(B)$, a interseção é contada duas vezes. Corrigimos essa repetição subtraindo-a uma vez:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se $A \cap B = \emptyset$, os eventos são **disjuntos** ou mutuamente exclusivos, e a fórmula se reduz a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo

Em uma turma, 60% gostam de Matemática, 40% gostam de Física e 25% gostam de ambas. A probabilidade de um aluno escolhido ao acaso gostar de Matemática ou Física é

$$0,60 + 0,40 - 0,25 = 0,75.$$

21.5 Probabilidade condicional

Quando recebemos uma informação do tipo “sabendo que”, o universo de comparação muda. Se sabemos que B ocorreu, passamos a olhar apenas os resultados de B ; entre eles, os favoráveis a A são os de $A \cap B$.

Proposição 21.2 (Probabilidade condicional). *Se $P(B) > 0$, então*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Reorganizando a fórmula, obtemos a regra do produto:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$

Ela descreve naturalmente experiências em etapas.

21.5.1 Árvore de probabilidades

Uma urna contém três bolas vermelhas e duas azuis. Duas bolas são retiradas sem reposição. A árvore registra como as probabilidades mudam depois da primeira retirada.

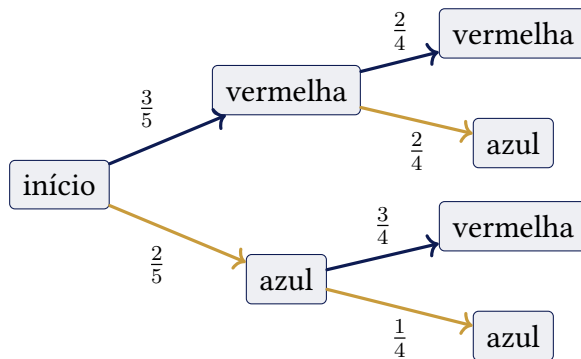


Figura 21.2: Sem reposição, as probabilidades da segunda etapa dependem do primeiro resultado.

Por exemplo,

$$P(\text{vermelha e depois azul}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Já sabendo que a primeira foi vermelha,

$$P(\text{segunda azul} \mid \text{primeira vermelha}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

21.6 Independência

Os eventos A e B são **independentes** quando saber que um ocorreu não altera a probabilidade do outro:

$$P(A | B) = P(A),$$

desde que $P(B) > 0$. Pela regra do produto, isso equivale a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Lança-se uma moeda justa e um dado ideal. O evento A = “dar cara” e o evento B = “sair 6” são independentes, pois

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}.$$

Eventos disjuntos não devem ser confundidos com eventos independentes. Se dois eventos de probabilidade positiva são disjuntos, a ocorrência de um impede a do outro; portanto, eles são dependentes.

21.7 Probabilidade total e Teorema de Bayes

Suponha que $B_1, B_2, \dots, B_n$ dividam o espaço amostral em casos disjuntos. Um evento A pode ocorrer por qualquer um desses casos. Somando os caminhos possíveis,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i).$$

Essa é a **fórmula da probabilidade total**.

Se A já ocorreu e queremos descobrir por qual caso B_j ele provavelmente veio, usamos

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{P(A)}.$$

Essa inversão da condição é conhecida como **Teorema de Bayes**.

Exemplo

Uma fábrica possui duas máquinas. A máquina M_1 produz 60% das peças e apresenta 2% de defeituosas; a máquina M_2 produz 40% e apresenta 5% de defeituosas. Se D é o evento “peça defeituosa”, então

$$P(D) = 0,60 \cdot 0,02 + 0,40 \cdot 0,05 = 0,032.$$

Sabendo que uma peça é defeituosa, a probabilidade de ela ter vindo de M_2 é

$$P(M_2 | D) = \frac{0,40 \cdot 0,05}{0,032} = 0,625.$$

21.8 Ensaios repetidos e distribuição binomial

Considere n repetições independentes de uma experiência com apenas dois resultados: sucesso, de probabilidade p , e fracasso, de probabilidade $1 - p$. Uma sequência específica com k sucessos tem probabilidade

$$p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Como há $\binom{n}{k}$ posições possíveis para os k sucessos, obtemos:

Proposição 21.3 (Probabilidade binomial). *A probabilidade de exatamente k sucessos em n ensaios independentes é*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Em três lançamentos de uma moeda justa, a probabilidade de exatamente duas caras é

$$\binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

21.9 Contagem aplicada à probabilidade

Em modelos equiprováveis, análise combinatória e probabilidade trabalham juntas: contamos todos os resultados e, depois, os que pertencem ao evento.

Exemplo 1

Escolhe-se uma carta de um baralho padrão. Há quatro ases e quatro reis, sem sobreposição entre esses grupos. Logo,

$$P(\text{ás ou rei}) = \frac{4 + 4}{52} = \frac{2}{13}.$$

Exemplo 2

Escolhem-se duas pessoas ao acaso entre dez. Há $\binom{10}{2} = 45$ duplas possíveis e apenas uma delas é formada por duas pessoas específicas. Portanto, a probabilidade é

$$\frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}.$$

21.10 Valor esperado

Quando uma experiência associa um valor numérico a cada resultado, podemos calcular sua média teórica. Se a variável aleatória X assume os valores $x_1, \dots, x_k$, definimos

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + \dots + x_kP(X = x_k).$$

O valor esperado não precisa ser um resultado possível em uma única tentativa; ele descreve a média que tende a aparecer quando a experiência é repetida muitas vezes.

Em um dado ideal,

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Nenhum lançamento produz 3,5, mas essa é a média de longo prazo. Em jogos, seguros e decisões sob incerteza, o valor esperado permite comparar ganhos e perdas ponderando cada consequência por sua probabilidade.

21.11 Exercícios Propostos**Fundamentos**

1. No lançamento de um dado ideal, qual é a probabilidade de sair:
 - (a) um número par;
 - (b) um número maior que 4;
 - (c) um número primo?
2. Em uma moeda justa lançada três vezes, qual é a probabilidade de sair exatamente duas caras?

Aplicação

3. Em uma turma, $P(M) = 0,55$, $P(F) = 0,35$ e $P(M \cap F) = 0,20$. Calcule $P(M \cup F)$.
4. Uma urna tem cinco bolas brancas e três pretas. Retiram-se duas bolas sem reposição. Qual é a probabilidade de ambas serem brancas?

Domínio

5. Uma urna tem quatro bolas vermelhas e seis azuis. Retiram-se duas bolas sem reposição. Qual é a probabilidade de a segunda ser vermelha sabendo que a primeira foi azul?
6. Um dado e uma moeda são lançados. Os eventos “dar coroa” e “sair número par” são independentes? Justifique.

Coroação

7. Retira-se uma carta de um baralho. Qual é a probabilidade de ela ser uma figura (J, Q ou K)?
8. Uma senha é formada por duas letras (A–Z) seguidas de dois algarismos (0–9), permitindo repetição. Se todas as senhas são igualmente prováveis, qual é a probabilidade de a senha começar com a letra A?
9. Duas máquinas, A e B , produzem respectivamente 70% e 30% das peças de uma fábrica. As taxas de defeito são 1% em A e 4% em B .
 - (a) Qual é a probabilidade de uma peça escolhida ao acaso ser defeituosa?
 - (b) Sabendo que a peça é defeituosa, qual é a probabilidade de ela ter sido produzida por B ?
10. Um jogador acerta cada lance livre com probabilidade 0,8. Admitindo independência entre os lançamentos, qual é a probabilidade de ele acertar exatamente quatro de cinco lances?
11. Dois dados ideais são lançados. Qual é a probabilidade de a soma ser 8, sabendo que pelo menos um dos dados mostrou 3?
12. Mostre que dois eventos disjuntos, ambos com probabilidade positiva, não podem ser independentes.

21.12 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- experimentos aleatórios, espaços amostrais e eventos;
- probabilidade em modelos equiprováveis e evento complementar;
- união, interseção e inclusão-exclusão;
- probabilidade condicional, regra do produto e independência;
- probabilidade total e Teorema de Bayes;
- ensaios independentes e probabilidade binomial;
- contagem aplicada a modelos equiprováveis;
- valor esperado de uma variável aleatória discreta.

CAPÍTULO 22

Sequências Numéricas

Motivação 22.1

Muitos fenômenos seguem padrões: o crescimento de uma população, os depósitos mensais em uma poupança, o número de folhas de uma planta em cada estação. Uma **sequência** é uma forma de registrar esses padrões com números, termo a termo. Neste capítulo vamos aprender a reconhecer padrões, descrever sequências por **fórmulas** ou **recorrências**, e estudar casos clássicos como **PA**, **PG** e **Fibonacci**.

Contexto histórico 22.1

Uma história clássica sobre padrões em sequências é atribuída a Carl Friedrich Gauss ainda criança. Conta-se que, na escola, ele recebeu a tarefa de somar os números de 1 a 100:

$$1 + 2 + \cdots + 100.$$

Em vez de adicionar termo a termo, ele reorganizou a soma observando que, ao parear extremos, surgia sempre o mesmo resultado:

$$(1 + 100) = (2 + 99) = \cdots = (50 + 51) = 101.$$

Como existem 50 pares, a soma total é

$$1 + 2 + \cdots + 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

O mais importante nessa solução não é o número 5050, mas a **ideia**: reconhecer uma regularidade e transformá-la em um método geral. Para um inteiro n , o mesmo pareamento mostra que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que é justamente a fórmula de soma de uma **progressão aritmética**. Esse tipo de raciocínio aparece em muitas situações: em juros simples, o acréscimo é constante e a sequência cresce como uma PA; em juros compostos, multiplicamos sempre pelo mesmo fator, e a sequência cresce como uma PG. Outra linha histórica famosa é a de Leonardo de Pisa (Fibonacci), que em 1202 apresentou uma sequência definida por recorrência ao estudar um problema de reprodução. A partir daí, ficou claro que nem toda sequência precisa ser descrita por uma fórmula pronta: às vezes a regra mais natural é "o próximo termo depende dos anteriores". Assim, o estudo de sequências se tornou uma ponte entre **padrões** (observação), **recorrências** (processo) e **fórmulas de soma** (cálculo eficiente), aparecendo tanto em problemas clássicos quanto em modelos modernos de crescimento e variação.

22.1 Introdução

Chamaremos de **sequência** uma função que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real a_n . Na prática, a sequência é apresentada listando seus primeiros termos e descrevendo a regra.

22.2 Como uma sequência pode ser descrita

Uma sequência pode ser **finita**, quando possui último termo, ou **infinita**, quando o processo continua indefinidamente. A lista

$$2, , 4, , 6, , 8$$

é finita; já

$$2, , 4, , 6, , 8, \dots$$

indica uma sequência infinita.

Há duas maneiras fundamentais de registrar a regra. Na **forma explícita**, o termo a_n é calculado diretamente a partir de n . Por exemplo,

$$a_n = 2n + 1$$

produz 3, 5, 7, 9, ... Na **forma recorrente**, cada termo é construído a partir de termos anteriores. A mesma sequência pode ser escrita como

$$a_1 = 3, \text{ e } a_n = a_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2).$$

Conhecer as duas formas é útil: a recorrência mostra como a sequência cresce; a expressão explícita permite encontrar um termo distante sem calcular todos os anteriores.

Quando somamos termos consecutivos, usamos com frequência a notação

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

O símbolo $\sum$ não cria uma nova operação: ele apenas escreve uma soma longa de maneira compacta.

22.3 Padrões

Exemplo

Identifique uma regra para a sequência 2, 5, 8, 11, 14, ...

Solução

A diferença entre termos consecutivos é sempre 3, logo é uma PA com $a_1 = 2$ e $r = 3$. Assim,

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1.$$

Exemplo

Identifique uma regra para a sequência 3, 6, 12, 24, 48, ...

Solução

Cada termo é o dobro do anterior, então é uma PG com $a_1 = 3$ e $q = 2$. Logo,

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

22.4 Recorrências

Definição

Uma **recorrência** define a_n em função de termos anteriores, junto com condições iniciais (por exemplo, a_1 e a_2).

Exemplo

Considere $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2$ para $n \geq 2$. Calcule a_5 .

Solução

Temos $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ e $a_5 = 9$.

22.5 Sequência de Fibonacci**Definição**

A sequência de Fibonacci é definida por

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Os primeiros termos são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Exemplo

Calcule F_7 .

Solução

$$F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8 \text{ e } F_7 = 13.$$

22.6 PA (Progressão Aritmética)**Definição**

Uma PA é uma sequência em que a diferença entre termos consecutivos é constante (r).

Partindo de a_1 e somando r repetidamente, chegamos ao termo geral

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Se $r > 0$, a PA é crescente; se $r < 0$, é decrescente; se $r = 0$, é constante.

Exemplo

Numa PA, $a_1 = 7$ e $r = -2$. Determine a_{10} .

Solução

$$a_{10} = 7 + (10 - 1)(-2) = 7 - 18 = -11.$$

22.7 PG (Progressão Geométrica)

Definição

Uma PG é uma sequência em que a razão entre termos consecutivos é constante (q).

Como cada termo é obtido multiplicando o anterior por q ,

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

O comportamento depende do sinal e do módulo de q . Para $q > 1$ e $a_1 > 0$, os termos crescem; para $0 < q < 1$, aproximam-se de zero; para $q < 0$, os sinais se alternam.

Exemplo

Numa PG, $a_1 = 5$ e $q = 3$. Determine a_6 .

Solução

$$a_6 = 5 \cdot 3^5 = 5 \cdot 243 = 1215.$$

22.8 Soma de termos

Soma na PA

Se (a_n) é PA, então

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Exemplo

Calcule S_{20} da PA com $a_1 = 4$ e $r = 3$.

Solução

Primeiro,

$$a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61.$$

Então,

$$S_{20} = \frac{20(4 + 61)}{2} = 10 \cdot 65 = 650.$$

Soma na PG

Se (a_n) é PG com $q \neq 1$, então

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Essa fórmula nasce de uma subtração simples. Se

$$S_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1},$$

então $qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$. Portanto,

$$(q - 1)S_n = a_1(q^n - 1),$$

o que fornece a expressão anterior.

Exemplo

Calcule S_8 da PG com $a_1 = 2$ e $q = 2$.

Solução

$$S_8 = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2(256 - 1) = 510.$$

Soma de uma PG infinita

Se $|q| < 1$, as potências q^n se aproximam de zero. Nesse caso, a soma infinita possui valor finito:

$$S_\infty = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Por exemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Não estamos dizendo que a soma termina; estamos dizendo que suas somas parciais se aproximam cada vez mais de 2.

22.9 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Determine se as sequências abaixo são PA, PG ou nenhuma delas:

22. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

- (a) 1, 4, 7, 10, ...
- (b) 2, 6, 18, 54, ...
- (c) 1, 1, 2, 3, 5, ...

2. Em uma PA com $a_1 = 3$ e $r = 5$, calcule a_{12} .

Aplicação

- 3. Calcule a soma S_{30} da PA com $a_1 = 2$ e $r = 4$.
- 4. Em uma PG com $a_1 = 81$ e $q = \frac{1}{3}$, calcule a_6 .

Domínio

- 5. Uma sequência é definida por $a_1 = 2$ e $a_n = 3a_{n-1}$ para $n \geq 2$.
 - (a) Escreva a_n na forma explícita.
 - (b) Calcule S_6 .
- 6. (Fibonacci) Calcule F_{10} .

Coroação

- 7. Uma PG tem $a_1 = 6$ e $q = 2$. Qual é o menor n tal que $a_n > 1000$?
- 8. Uma sequência é definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Calcule a_8 .

22.10 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- reconhecimento de padrões em sequências;
- formas explícitas, recorrências e notação de somatório;
- sequência de Fibonacci;
- progressão aritmética (PA): termo geral e soma;
- progressão geométrica (PG): termo geral, soma finita e soma infinita para $|q| < 1$.

CAPÍTULO 23

Exercícios da Parte V: Contagem e Sequências

Contagem, probabilidade e sequências lidam com possibilidades, mas não da mesma maneira. Em contagem, precisamos decidir quando duas escolhas são diferentes; em probabilidade, quais resultados têm o mesmo peso; em sequências, qual regularidade permanece de um termo para o seguinte.

23.1 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1,2,3,4,5?
2. Quantos números pares de 3 algarismos (não necessariamente distintos) podem ser formados com os dígitos 0,1,2,3,4,5?
3. De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar em uma fila de 6 cadeiras?
4. De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar em uma mesa redonda? (Considere rotações como iguais.)
5. Uma urna tem 3 bolas vermelhas e 2 azuis. Retira-se 1 bola ao acaso. Qual a probabilidade de sair azul?
6. Numa PA com $a_1 = 5$ e razão $r = 3$, determine a_{10} .
7. Numa PG com $a_1 = 2$ e razão $q = 2$, determine a_8 .

Aplicação

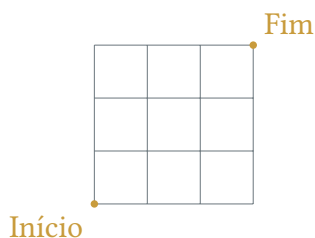
8. Uma senha tem 4 caracteres, usando apenas as letras A, B e C. Quantas senhas podem ser formadas?
9. Uma senha tem 5 dígitos e não pode começar com 0. Quantas senhas podem ser formadas usando os dígitos 0–9, com repetição?
10. Em uma sala com 10 alunos, quantas duplas diferentes podem ser formadas?
11. Um grupo de 12 alunos vai escolher um representante e um vice. De quantas formas isso pode ser feito?
12. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de sair exatamente 2 caras?
13. Dois dados honestos são lançados. Qual a probabilidade de a soma ser 7?
14. A soma dos 20 primeiros termos de uma PA é 210 e $a_1 = 3$. Determine a razão.
15. Numa PG com $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{2}$, calcule S_6 .

Domínio

16. Quantos anagramas diferentes tem a palavra MATEMATICA?
17. Quantos anagramas diferentes tem a palavra ARARA?
18. Uma caixa tem 5 peças boas e 3 defeituosas. Retiram-se 2 peças sem reposição. Qual a probabilidade de as duas serem boas?
19. Uma urna tem 6 bolas numeradas 1 a 6. Retiram-se 2 sem reposição. Qual a probabilidade de a soma ser 7?
20. Numa PG, $a_3 = 12$ e $a_6 = 96$. Determine q e a_1 .
21. Numa PA, $a_4 = 11$ e $a_{12} = 35$. Determine a_1 e a razão.

Coroação

22. (Desafio) Uma função a_n é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Encontre uma fórmula para a_n .
23. (Desafio) Seja $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = \frac{b_n}{1 + b_n}$. Conjecture o valor de b_n e prove por indução.
24. (Desafio) (Com desenho) Em uma grade 3×3 , quantos caminhos mínimos existem do canto inferior esquerdo ao canto superior direito, movendo apenas para a direita e para cima?



25. (Desafio) Um baralho padrão tem 52 cartas. Retiram-se 5 cartas. Qual a probabilidade de obter exatamente 2 ases?

PARTE VI • ÁLGEBRA LINEAR ELEMENTAR

CAPÍTULO 24

Sistemas Lineares

Motivação 24.1

Muitas situações exigem descobrir valores desconhecidos usando várias informações ao mesmo tempo.

Ao calcular preços de produtos, analisar circuitos elétricos, estudar misturas químicas ou modelar fenômenos físicos, frequentemente obtemos diversas relações envolvendo as mesmas incógnitas.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Resolver esse sistema significa encontrar valores de x e y que satisfaçam simultaneamente ambas as equações. Mais importante do que decorar técnicas será compreender a ideia central: **cada equação restringe as possibilidades até restarem apenas as soluções compatíveis com todas elas.**

Contexto histórico 24.1

Problemas envolvendo sistemas de equações aparecem há milhares de anos.

Os babilônios já resolviam problemas equivalentes a sistemas simples por volta de 1800 a.C., principalmente em questões ligadas ao comércio, construções e divisão de terras.

Séculos depois, matemáticos chineses desenvolveram métodos extremamente organizados para resolver vários sistemas simultaneamente. No livro *Os Nove Capítulos da Arte Matemática*, escrito entre os séculos II a.C. e I d.C., aparecem técnicas muito próximas do moderno **escalonamento**.

24.1 Introdução

Um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares envolvendo as mesmas incógnitas.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Resolver o sistema significa encontrar valores que satisfaçam simultaneamente todas as equações.

Ideia geométrica inicial

Cada equação do tipo

$$ax + by = c$$

representa uma reta no plano.

Assim, resolver um sistema linear equivale a encontrar os pontos em comum entre essas retas.

Observação

Uma única equação geralmente possui infinitas soluções.

Por exemplo, $x + y = 5$ aceita $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(10, -5)$, $\dots$

Quando adicionamos uma nova equação, diminuimos as possibilidades.

É justamente essa combinação de restrições que permite determinar as incógnitas.

24.2 Teoremas e testes

Proposição 24.1 (Forma geral). *Um sistema linear 2×2 possui a forma*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

onde

$$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Proposição 24.2 (Operações equivalentes). *As seguintes operações preservam o conjunto solução:*

- trocar duas equações;
- multiplicar uma equação por número não nulo;
- somar a uma equação um múltiplo de outra.

Proposição 24.3 (Classificação). *Todo sistema linear pertence exatamente a um dos casos:*

- **SPD**: possui solução única;
- **SPI**: possui infinitas soluções;
- **SI**: não possui solução.

Teste 24.4 (Reconhecimento rápido). • Retas concorrentes $\Rightarrow$ SPD.

- Retas coincidentes $\Rightarrow$ SPI.
- Retas paralelas distintas $\Rightarrow$ SI.

24.3 Método da substituição

A ideia do método da substituição é:

1. isolar uma incógnita;
2. substituir na outra equação;
3. resolver a equação restante.

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solução

Da segunda equação, $x = y + 1$. Substituindo na primeira, $(y + 1) + y = 9$, logo $2y + 1 = 9$. Então $2y = 8$ e portanto $y = 4$. Agora $x = y + 1 = 5$, e assim $(x, y) = (5, 4)$.

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Solução

Da segunda equação, $x = 2y - 1$. Substituindo na primeira, $3(2y - 1) + y = 11$, logo $6y - 3 + y = 11$. Então $7y = 14$ e $y = 2$. Agora $x = 2(2) - 1 = 3$ e, portanto, $(x, y) = (3, 2)$.

24.4 Método da adição

No método da adição, manipulamos as equações para eliminar uma incógnita.

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Solução

Somando as equações, $(2x + y) + (3x - y) = 11 + 4$, logo $5x = 15$ e, assim, $x = 3$.

Substituindo em $2x + y = 11$, obtemos $2(3) + y = 11$. Então $6 + y = 11$ e $y = 5$. Portanto, $(x, y) = (3, 5)$.

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

Solução

Somando as equações, $(4x + 3y) + (2x - 3y) = 18 + (-6)$, logo $6x = 12$ e $x = 2$.

Substituindo em $2x - 3y = -6$, obtemos $2(2) - 3y = -6$. Então $4 - 3y = -6$, $-3y = -10$ e $y = \frac{10}{3}$. Assim, a solução é $(2, \frac{10}{3})$.

24.5 Interpretação geométrica

Cada equação linear do tipo

$$ax + by = c$$

representa uma reta no plano cartesiano.

Assim, resolver um sistema linear equivale a procurar os pontos que pertencem simultaneamente às retas do sistema.

Geometricamente, existem apenas três possibilidades:

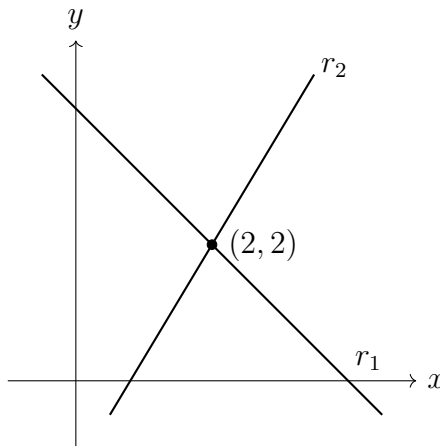
- as retas se cruzam em um único ponto;
- as retas coincidem;
- as retas são paralelas distintas.

Cada caso corresponde a um tipo de sistema.

SPD (Sistema Possível e Determinado)

Quando as retas se cruzam em um único ponto, existe exatamente uma solução.

$\Rightarrow$ uma única solução.

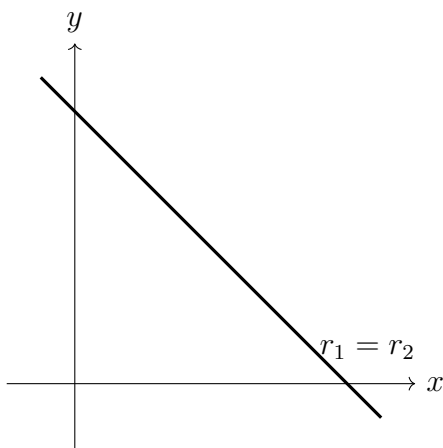


Nesse caso, o ponto de interseção fornece a solução do sistema.

SPI (Sistema Possível e Indeterminado)

Quando as retas coincidem, todos os pontos da reta satisfazem ambas as equações.

$\Rightarrow$ infinitas soluções.

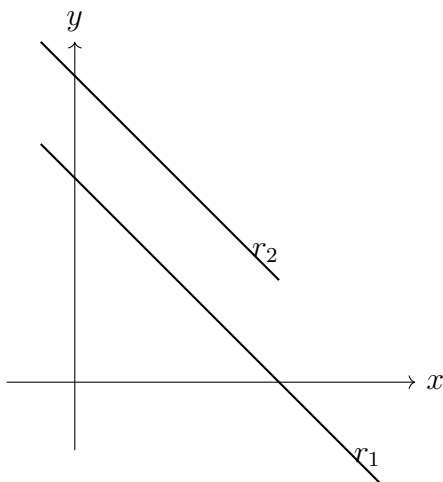


As duas equações representam exatamente a mesma reta.

SI (Sistema Impossível)

Quando as retas são paralelas distintas, não existe ponto comum entre elas.

$\Rightarrow$ nenhuma solução.



Como não existe interseção entre as retas, o sistema não possui solução.

Exemplo

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solução

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos $2x + 2y = 8$.

Portanto, a segunda equação é apenas uma repetição da primeira.

As duas equações representam a mesma reta.

Logo, o sistema possui infinitas soluções e é classificado como um SPI.

24.6 Escalonamento

O escalonamento consiste em transformar o sistema em outro equivalente, mas progressivamente mais simples.

A ideia principal é eliminar incógnitas passo a passo.

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Solução

Subtraindo a primeira equação da terceira, $(x + 2y - z) - (x + y + z) = 5 - 6$, logo $y - 2z = -1$.

Agora, subtraindo duas vezes a primeira equação da segunda, $(2x - y + z) - 2(x + y + z) = 3 - 12$, então $-3y - z = -9$.

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} y - 2z = -1 \\ -3y - z = -9 \end{cases}$$

Da primeira equação, $y = 2z - 1$. Substituindo na segunda, $-3(2z - 1) - z = -9$, logo $-6z + 3 - z = -9$, $-7z = -12$ e $z = \frac{12}{7}$. Agora $y = 2 \cdot \frac{12}{7} - 1 = \frac{17}{7}$.

Substituindo em $x + y + z = 6$, obtemos $x + \frac{17}{7} + \frac{12}{7} = 6$. Então $x + \frac{29}{7} = 6$ e $x = \frac{13}{7}$. Assim, a solução é $(\frac{13}{7}, \frac{17}{7}, \frac{12}{7})$.

24.7 Sistemas homogêneos

Um sistema linear é chamado **homogêneo** quando todos os termos independentes são iguais a zero.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução $x = y = z = 0$, chamada de **solução trivial**.

24.8 Discussão de sistemas

Em alguns sistemas, o número de soluções depende de parâmetros.

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

Solução

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos $2x + 2y = 4$. Logo:

- se $k = 4$, o sistema é SPI;
- se $k \neq 4$, o sistema é SI.

24.9 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Resolva os sistemas abaixo.

$$(a) \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

2. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI.

$$(a) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

3. Resolva os sistemas utilizando o método da substituição.

$$(a) \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

4. Resolva os sistemas utilizando o método da adição.

$$(a) \begin{cases} 4x + y = 13 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 20 \end{cases}$$

5. Determine o valor de k para que o sistema seja impossível:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

Aplicação

6. Em uma lanchonete, 2 hambúrgueres e 1 refrigerante custam R\$31. Já 1 hambúrguer e 2 refrigerantes custam R\$23.

Determine o preço de cada item.

7. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

8. Um estacionamento possui carros e motos. Ao todo existem 30 veículos e 94 rodas.

Determine a quantidade de carros e motos.

9. Resolva:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 12 \end{cases}$$

Domínio

10. Discuta o sistema em função de k :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

11. Resolva:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

12. Determine os valores de k para os quais o sistema é SPI:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

13. Resolva:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$$

Coroação

14. Determine os valores de k para os quais o sistema possui solução única:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 2 \\ x + y + kz = 3 \end{cases}$$

15. Resolva:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 4z = 15 \\ x + 4y + 16z = 45 \end{cases}$$

16. Encontre todos os valores de a para os quais o sistema possui infinitas soluções:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

17. Três números possuem soma igual a 26.

O segundo excede o primeiro em 4 unidades.

O terceiro é igual ao dobro do primeiro menos o segundo.

Determine os três números.

18. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 7 \\ 4x + 7y + 13z = 17 \end{cases}$$

Sem resolver completamente o sistema, determine o valor de

$$x + 2y + 4z.$$

24.10 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- definição de sistemas lineares;
- métodos da substituição e da adição;
- interpretação geométrica;
- classificação em SPD, SPI e SI;
- escalonamento;
- sistemas homogêneos;
- discussão de sistemas com parâmetros.

CAPÍTULO 25

Matrizes

Motivação 25.1

Grandes quantidades de informações muitas vezes precisam ser organizadas de forma eficiente.

Notas de alunos, imagens digitais, tabelas financeiras, redes sociais, circuitos elétricos, sistemas lineares e até gráficos computacionais utilizam estruturas organizadas em linhas e colunas.

Uma imagem em tons de cinza, por exemplo, pode ser representada por números:

$$\begin{bmatrix} 12 & 45 & 90 \\ 30 & 80 & 120 \\ 15 & 60 & 200 \end{bmatrix}$$

Cada número representa a intensidade luminosa de um pixel.

As matrizes surgem justamente como uma ferramenta poderosa para organizar, manipular e transformar informações de maneira sistemática. Mais do que simples tabelas, elas funcionam como estruturas algébricas capazes de representar transformações geométricas, resolver sistemas lineares e modelar fenômenos complexos.

Contexto histórico 25.1

Os chineses, em *Os Nove Capítulos da Arte Matemática*, já organizavam coeficientes em tabelas retangulares semelhantes às matrizes modernas. Entretanto, o conceito formal de matriz surgiu apenas no século XIX, principalmente com os trabalhos de *Arthur Cayley*, que percebeu que essas tabelas poderiam ser manipuladas algebricamente como objetos próprios.

A partir daí, matrizes tornaram-se fundamentais em praticamente toda a matemática moderna.

25.1 Introdução

Uma **matriz** é uma tabela retangular formada por números organizados em linhas e colunas.

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

possui 2 linhas e 3 colunas; dizemos, portanto, que sua ordem é 2×3 .

Interpretação intuitiva

Cada linha pode representar um objeto diferente.

Cada coluna pode representar uma característica diferente.

Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

poderia representar notas de dois alunos em três provas:

- primeira linha $\rightarrow$ aluno 1;
- segunda linha $\rightarrow$ aluno 2;
- colunas $\rightarrow$ provas.

As matrizes surgem justamente porque organizar informações dessa forma permite realizar cálculos rapidamente e identificar padrões com facilidade.

Notação

Uma matriz genérica pode ser escrita como

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

onde:

- m representa o número de linhas;
- n representa o número de colunas;
- a_{ij} representa o elemento da linha i e coluna j .

Como localizar elementos

O índice da linha aparece primeiro e o índice da coluna aparece depois. Assim, a_{23} significa linha 2, coluna 3.

Exemplo

Na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

temos $a_{12} = 1$, pois o número 1 está na linha 1 e coluna 2. Além disso, $a_{21} = 7$, pois o número 7 está na linha 2 e coluna 1.

25.2 Tipos especiais de matrizes

Algumas matrizes aparecem com tanta frequência que recebem nomes especiais.

Reconhecer rapidamente esses formatos será importante nos próximos capítulos.

Proposição 25.1 (Matriz quadrada). *Uma matriz é quadrada quando possui o mesmo número de linhas e de colunas.*

Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

possui ordem 2×2 .

Proposição 25.2 (Matriz identidade). *A matriz identidade possui 1 na diagonal principal e 0 nos demais elementos.*

Por exemplo,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ela funciona como o número 1 da multiplicação matricial, pois $AI = IA = A$.

Proposição 25.3 (Matriz nula). *Uma matriz é nula quando todos os seus elementos são iguais a zero.*

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

funciona como o zero da álgebra matricial.

Proposição 25.4 (Matriz diagonal). *Uma matriz diagonal possui todos os elementos fora da diagonal principal iguais a zero.*

Por exemplo, na matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a diagonal principal é formada pelos elementos 2, 5 e -1 .

25.3 Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais quando:

- possuem a mesma ordem;
- possuem elementos correspondentes iguais.

Isso significa que cada posição deve coincidir exatamente.

Exemplo

Se

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

então os elementos correspondentes devem ser iguais. Comparando posição por posição, $x = 1$ e $y = 4$.

25.4 Adição e subtração

A soma de matrizes é feita elemento a elemento.

Ou seja:

- somamos entradas que ocupam a mesma posição;
- linha com linha;
- coluna com coluna.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+1 \\ 3+0 & 4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observação

Só é possível somar matrizes de mesma ordem: não faz sentido somar 2×2 com 3×1 , pois as posições deixariam de corresponder.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

25.5 Multiplicação por escalar

Multiplicar uma matriz por um número significa multiplicar todos os seus elementos por esse número.

Exemplo

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

25.6 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes é uma das operações mais importantes de toda a Álgebra Linear.

Diferente da soma, ela não é feita elemento a elemento.

Na verdade, multiplicar matrizes significa combinar informações de maneira organizada.

Ideia central

Cada elemento da matriz resultante surge da combinação:

- de uma linha da primeira matriz;

- com uma coluna da segunda matriz.

Em outras palavras:

linha $\times$ coluna

Esse é o núcleo da multiplicação matricial.

Condição de existência

Nem toda multiplicação pode ser realizada. Se $A_{m \times n}$ e $B_{p \times q}$, então AB só existe quando $n = p$. Ou seja:

o número de colunas da primeira matriz deve coincidir com o número de linhas da segunda.

Exemplo de verificação

Considere $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 4}$. Como $3 = 3$, o produto existe, e o resultado terá ordem 2×4 .

Já $A_{2 \times 3}$ e $B_{2 \times 2}$ não podem ser multiplicadas nessa ordem, pois $3 \neq 2$.

Como calcular cada elemento

Cada entrada do produto é obtida:

1. multiplicando elementos correspondentes;
2. somando os resultados.

Exemplo inicial

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

As ordens são $A_{1 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$; como $2 = 2$, o produto existe.

Fazendo linha $\times$ coluna,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

Exemplo completo

Multiplique

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primeiro elemento

Usamos a primeira linha de A com a primeira coluna de B :

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 5 + 4 = 9.$$

Segundo elemento

Primeira linha com segunda coluna:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 + 0 = 1.$$

Terceiro elemento

Segunda linha com primeira coluna:

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23.$$

Quarto elemento

Segunda linha com segunda coluna:

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$$

Portanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esquema visual

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boxed{5} & 1 \\ \boxed{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 9$$

Observação

Em geral, $AB \neq BA$: a multiplicação matricial não é comutativa.

Esse é um dos erros mais comuns no início do estudo de matrizes.

25.7 Interpretação geométrica

Uma matriz não serve apenas para organizar números.

Ela também pode representar transformações geométricas no plano.

Quando multiplicamos uma matriz por um vetor, estamos transformando geometricamente esse vetor.

Dependendo da matriz, podemos:

- aumentar ou diminuir comprimentos;
- girar figuras;
- refletir pontos;
- deformar regiões;
- alterar direções.

Essa ideia é extremamente importante em:

- computação gráfica;
- modelagem 3D;
- animações;
- física;
- robótica;
- inteligência artificial.

A matriz identidade

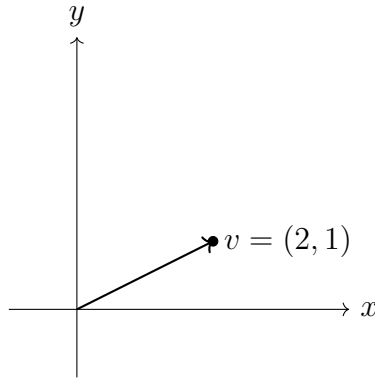
Considere a matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que não altera nenhum vetor. Por exemplo,

$$I \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, todos os pontos permanecem exatamente na mesma posição.



A transformação não modifica o vetor.

Expansão geométrica

Agora considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que multiplica todas as coordenadas por 2 e, portanto, produz uma expansão.

Exemplo geométrico

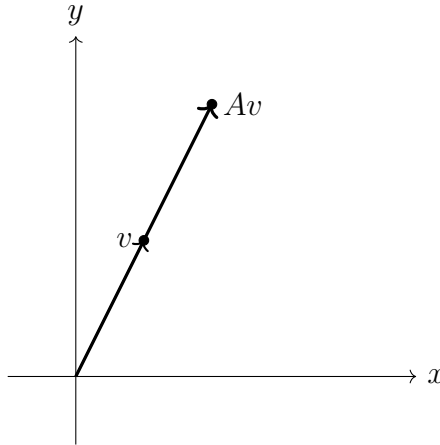
Considere o vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Multiplicando, obtemos

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Observe o que aconteceu:

- a direção do vetor foi preservada;
- o comprimento dobrou;
- todas as coordenadas foram multiplicadas por 2.

Representação gráfica



O vetor transformado permanece na mesma direção, mas possui comprimento maior.

Compressão

Considere agora a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

que reduz todos os comprimentos pela metade.

Aplicando em $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, obtemos $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: a direção continua igual e o vetor fica menor.

Reflexão

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

reflete pontos em relação ao eixo x . Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

O ponto mantém a coordenada x , mas troca o sinal da coordenada y .

Rotação

Algumas matrizes conseguem girar vetores.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

realiza uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Aplicando em $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor originalmente horizontal tornou-se vertical.

Conclusão geométrica

Em Álgebra Linear, matrizes frequentemente devem ser interpretadas como:

máquinas de transformação geométrica.

Elas recebem vetores de entrada e produzem novos vetores transformados.

25.8 Matriz transposta

A transposta de uma matriz é obtida trocando linhas por colunas.

Ou seja:

- a primeira linha vira a primeira coluna;
- a segunda linha vira a segunda coluna;
- e assim sucessivamente.

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

25.9 Matrizes e sistemas lineares

Sistemas lineares podem ser representados matricialmente.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Podemos escrevê-lo como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Essa forma compacta será extremamente importante em Álgebra Linear.

25.10 Exercícios Propostos

Fundamentos

- Determine a ordem de cada matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine os elementos pedidos.

(a) a_{12}

(b) a_{21}

(c) a_{23}

3. Determine os valores de x e y para que as matrizes sejam iguais:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Efetue a soma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

5. Multiplique a matriz pelo escalar indicado:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicação

6. Efetue o produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Verifique se o produto abaixo existe. Em caso afirmativo, determine a ordem da matriz resultante.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$$

8. Determine:

$$(A + B)^T$$

para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Represente matricialmente o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Domínio

10. Calcule:

$$A^2$$

para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Verifique se:

$$AB = BA$$

para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Determine todas as matrizes X tais que:

$$X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

13. Determine geometricamente o efeito da matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

sobre vetores do plano.

Coroação14. Determine a matriz X tal que:

$$AX = B$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Considere:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule:

$$A^2, \quad A^3, \quad A^4.$$

O que você percebe nos resultados?

16. Mostre que:

$$(A^T)^T = A$$

para qualquer matriz A .

17. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determine as condições sobre a, b, c, d para que:

$$A = A^T.$$

25.11 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- definição de matrizes;
- ordem e notação;
- igualdade de matrizes;
- adição e subtração;
- multiplicação por escalar;
- multiplicação matricial;
- interpretação geométrica;
- matriz transposta;
- representação matricial de sistemas lineares.

CAPÍTULO 26

Determinantes

Motivação 26.1

Ao estudar matrizes, percebemos que algumas transformações apenas deformam figuras, enquanto outras conseguem achatá-las completamente. Um quadrado pode virar um paralelogramo maior, menor ou até colapsar em uma reta.

Naturalmente surge a pergunta: **o que determina esse comportamento?**

Os determinantes aparecem justamente para medir esse efeito.

Eles indicam quanto uma transformação expande, comprime ou colapsa regiões do plano e do espaço.

Além da interpretação geométrica, os determinantes também permitem descobrir se uma matriz pode ser invertida e se um sistema linear possui solução única.

Embora pareçam apenas um número associado a uma matriz, os determinantes carregam uma enorme quantidade de informação sobre o comportamento geométrico e algébrico das transformações lineares.

Contexto histórico 26.1

Ideias relacionadas a determinantes surgiram inicialmente no estudo de sistemas lineares.

Matemáticos chineses já utilizavam métodos semelhantes muitos séculos antes da formalização moderna.

Posteriormente, Leibniz, Cramer e Laplace desenvolveram propriedades fundamentais dos determinantes durante os séculos XVII e XVIII.

No século XIX, os determinantes tornaram-se parte essencial da Álgebra Linear e da Geometria Analítica.

26.1 Introdução

O **determinante** é um número associado a uma matriz quadrada.

Somente matrizes quadradas possuem determinante.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Seu determinante pode ser representado por:

$$\det(A)$$

ou:

$$|A|.$$

Interpretação inicial

O determinante mede o efeito geométrico produzido pela matriz.

Por exemplo:

- determinante positivo $\rightarrow$ preserva orientação;
- determinante negativo $\rightarrow$ inverte a orientação da figura (como um espelhamento/reflexão);
- determinante nulo $\rightarrow$ colapsa o espaço.

Quanto maior o valor absoluto do determinante, maior tende a ser a expansão produzida pela transformação.

26.2 Determinante de ordem 2

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

O determinante é dado por:

$$\det(A) = ad - bc.$$

Esquema visual

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Diagonal principal menos diagonal secundária.

Exemplo

Calcule:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solução Passo a Passo:

1. Multiplicamos os elementos da diagonal principal:

$$2 \cdot 4 = 8$$

2. Multiplicamos os elementos da diagonal secundária:

$$1 \cdot 3 = 3$$

3. Subtraímos o segundo resultado do primeiro:

$$\det(A) = 8 - 3 = 5$$

Logo:

$$\det(A) = 5.$$

Exemplo

Calcule:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

Solução Passo a Passo:

1. Diagonal principal:

$$1 \cdot 10 = 10$$

2. Diagonal secundária:

$$5 \cdot 2 = 10$$

3. Subtração:

$$\det(A) = 10 - 10 = 0$$

Logo:

$$\det(A) = 0.$$

26.3 Interpretação geométrica

O determinante possui interpretação geométrica extremamente importante.

Área de paralelogramos

Considere os vetores que formam as colunas da matriz:

$$u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

A área do paralelogramo formado por eles é dada pelo valor absoluto (módulo) do determinante:

$$\text{Área} = |ad - bc| = |\det(A)|.$$

Exemplo

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

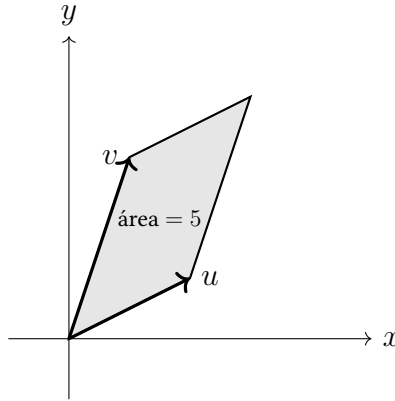
Calculando o determinante para encontrar a área correspondente:

$$\det(A) = (2 \cdot 3) - (1 \cdot 1) = 6 - 1 = 5.$$

Logo, a área do paralelogramo associado vale:

$$5.$$

Representação gráfica



O determinante mede exatamente a área dessa região hachurada.

Determinante nulo

Quando:

$$\det(A) = 0,$$

os vetores tornam-se alinhados (colineares).

Nesse caso:

- o paralelogramo colapsa em um segmento de reta;
- a área torna-se zero;
- a matriz deixa de ser invertível (matriz singular).

26.4 Determinante de ordem 3

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Uma maneira prática de calcular determinantes 3×3 é utilizar a **Regra de Sarrus**.

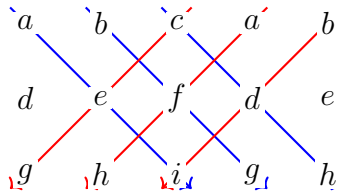
Regra de Sarrus

Repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

Agora seguimos as diagonais.

Representação com setas



As diagonais azuis (descendo da esquerda para a direita) são somadas.

As diagonais vermelhas (descendo da direita para a esquerda) são subtraídas.

Exemplo

Calcule:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solução Passo a Passo:

1. Calculamos a soma dos produtos das diagonais principais (azuis):

$$P = (1 \cdot 1 \cdot 0) + (2 \cdot 4 \cdot 2) + (3 \cdot 0 \cdot 1)$$

$$P = 0 + 16 + 0 = 16$$

2. Calculamos a soma dos produtos das diagonais secundárias (vermelhas):

$$S = (3 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 4 \cdot 1) + (2 \cdot 0 \cdot 0)$$

$$S = 6 + 4 + 0 = 10$$

3. O determinante final será a diferença $P - S$:

$$\det(A) = P - S = 16 - 10 = 6$$

Logo:

$$\det(A) = 6.$$

26.5 Determinantes maiores

A Regra de Sarrus funciona apenas para matrizes 3×3 .

Para determinantes maiores, precisamos utilizar outros métodos.

Como funciona a Expansão de Laplace

A Expansão de Laplace consiste em escolher uma linha ou coluna da matriz e decompor o determinante em determinantes menores.

Cada elemento gera:

- um sinal;
- um menor complementar;
- um cofator.

Matriz de sinais

Os sinais seguem sempre o padrão alternado:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Equivalentemente:

$$(-1)^{i+j}$$

onde:

- i representa a linha;
- j representa a coluna.

Menor complementar

Ao escolher um elemento:

$$a_{ij},$$

apagamos:

- sua linha;
- sua coluna.

A matriz restante gera o chamado **menor complementar**.

Exemplo

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Vamos expandir usando o elemento:

$$a_{12} = 2.$$

O sinal dessa posição é negativo:

$$(-1)^{1+2} = -1.$$

Agora removemos:

- a linha 1;
- a coluna 2.

Restando:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Portanto, o cofator associado é:

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Estrutura da expansão

Expandindo pela primeira linha:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

A principal vantagem da Expansão de Laplace é transformar determinantes grandes em vários determinantes menores.

26.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule o determinante de cada uma das matrizes 2×2 :

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

2. Utilizando a Regra de Sarrus, determine o valor de:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Determine para quais valores reais de x o determinante da matriz abaixo é igual a zero:

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 9 & x \end{bmatrix}$$

4. Se uma matriz quadrada possui duas linhas exatamente iguais, o que podemos afirmar sobre o valor do seu determinante? Teste com um exemplo 2×2 .

Aplicação

5. Determine a área do paralelogramo construído no plano cartesiano cujos vértices adjacentes à origem são determinados pelos vetores:

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6. Verifique se o sistema linear abaixo possui solução única analisando apenas o determinante da sua matriz de coeficientes:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

7. Na geometria analítica, podemos verificar se três pontos são colineares (estão alinhados) utilizando determinantes. Os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Com base nessa condição, verifique se os pontos $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ e $C(3, 6)$ estão alinhados.

Domínio

8. Considere uma matriz quadrada A de ordem 2×2 tal que $\det(A) = -3$. Calcule o valor de:

(a) $\det(5A)$

(b) $\det(A^T)$

9. Calcule o determinante da matriz triangularizada abaixo realizando apenas a multiplicação da sua diagonal:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

10. Resolva a equação trigonométrica no intervalo $[0, 2\pi]$ sabendo que o determinante da matriz a seguir é nulo:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos(x) \end{vmatrix} = 0$$

Coroação

11. **Desafio de Laplace:** Encontre o valor do determinante da seguinte matriz 4×4 expandindo-o pela linha ou coluna que contém mais elementos nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

12. Prove algebricamente que para qualquer matriz genérica A de ordem 2×2 , o determinante de A é exatamente igual ao determinante de sua transposta, ou seja:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

13. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Se multiplicarmos uma única linha dessa matriz por um número real k , o valor do novo determinante fica multiplicado por k . Use essa propriedade e o conceito de escalonamento para explicar o motivo de $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.

26.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- Definição de determinante como um número associado a matrizes quadradas;
- Cálculo prático de determinantes de ordem 2 ($ad - bc$);
- Interpretação geométrica como fator de escala para áreas e volumes;
- Regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de ordem 3;
- Introdução aos métodos para ordens maiores: Expansão de Laplace e Escalonamento.

PARTE VII • GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO 27

Geometria Plana

Motivação 27.1

A Geometria Plana organiza o raciocínio sobre figuras no plano: retas, ângulos, triângulos, polígonos e circunferências. Ela é, ao mesmo tempo, uma base para problemas de vestibulares e olimpíadas e uma porta de entrada para ideias mais avançadas (transformações, teoremas clássicos e métodos de prova). Neste capítulo vamos da base ao avançado: propriedades angulares, congruência e semelhança, polígonos, circunferência e técnicas de área.

Contexto histórico 27.1

A geometria sistemática nasce na tradição grega e é consolidada nos *Elementos* de Euclides (c. 300 a.C.), com a ideia de construir uma teoria a partir de definições, postulados e provas. Séculos depois, problemas de semelhança e trigonometria impulsionaram navegação e cartografia. No século XVII, a geometria analítica conectou figuras a equações; no XIX, novas geometrias ampliaram a noção de espaço. Mesmo assim, a geometria plana clássica permanece central: muitos resultados profundos podem ser obtidos apenas com ângulos, paralelismo, semelhança e áreas.

27.1 Fundamentos

27.1.1 Ponto, reta e plano

A linguagem básica da geometria plana começa com objetos primitivos (ponto, reta) e com a ideia de plano como “superfície” onde desenhamos e medimos.

O ponto indica uma posição e não possui dimensão. A reta se prolonga indefinidamente nos dois sentidos; por dois pontos distintos passa uma única

reta. Já três pontos não colineares determinam um plano. Essas afirmações parecem simples, mas sustentam todas as construções que faremos adiante.

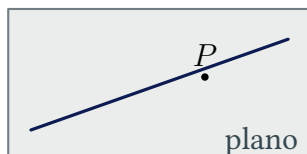


Figura 27.1: Ponto P e reta contidos no plano.

27.1.2 Segmentos

Segmentos são porções de reta com extremidades bem definidas; são a unidade natural para discutir distâncias.

Dados dois pontos A e B , escrevemos $\overline{AB}$ para o segmento e AB para seu comprimento. A semirreta de origem A que passa por B , por sua vez, começa em A e segue indefinidamente na direção de B . O ponto médio M de $\overline{AB}$ é caracterizado por

$$AM = MB = \frac{AB}{2}.$$



Figura 27.2: Segmento $\overline{AB}$.

27.1.3 Paralelismo e perpendicularismo

Relações entre retas (paralelas e perpendiculares) organizam grande parte das propriedades angulares e das construções.

Retas paralelas pertencem ao mesmo plano e não se encontram. Retas perpendiculares formam quatro ângulos retos. Na geometria euclidiana, por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a ela; além disso, duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

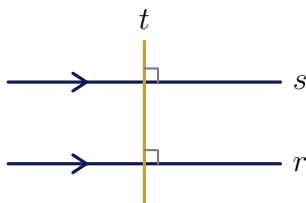


Figura 27.3: As retas r e s são paralelas (mesma marca); a reta t é perpendicular a ambas.

27.1.4 Noções de perímetro e área

Perímetro mede contorno; área mede “quantidade de superfície”. Ao longo do capítulo, vamos alternar entre comprimentos, razões e áreas para revelar relações que nem sempre aparecem à primeira vista.

Por isso, as unidades também mudam: o perímetro é medido em unidades de comprimento, como cm, enquanto a área é medida em unidades quadradas, como cm^2 . Se todas as medidas de uma figura são multiplicadas por k , seu perímetro é multiplicado por k , mas sua área é multiplicada por k^2 .

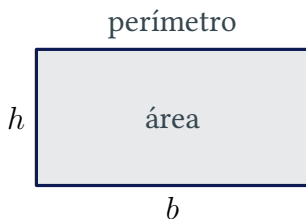


Figura 27.4: Perímetro (contorno destacado) e área (região sombreada) de uma figura simples.

27.1.5 Ângulos

Um ângulo mede a abertura entre duas semirretas de mesma origem. Dois ângulos são **complementares** quando somam 90° e **suplementares** quando somam 180° . Quando duas retas se cruzam, os ângulos opostos pelo vértice são iguais, enquanto dois ângulos adjacentes sobre uma mesma reta são suplementares.

Paralelas cortadas por uma transversal

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então:

- ângulos correspondentes são iguais;
- ângulos alternos internos são iguais;
- ângulos colaterais internos somam 180° .

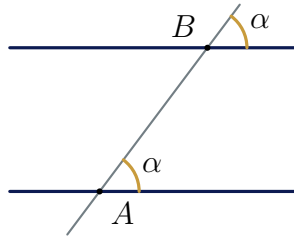


Figura 27.5: Paralelas e transversal: ângulos correspondentes (e também alternos) são iguais.

Exemplo

Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal. Um dos ângulos internos do mesmo lado mede 70° . Quanto mede o outro ângulo interno do mesmo lado?

Solução

Ângulos colaterais internos são suplementares:

$$70^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 110^\circ.$$

27.2 Triângulos

27.2.1 Classificação

Um mesmo triângulo recebe duas classificações: uma de acordo com seus lados e outra de acordo com seus ângulos. Assim, ele pode ser, por exemplo, isósceles e acutângulo, ou escaleno e retângulo.

Classificação quanto aos lados

- **Equilátero:** possui os três lados congruentes. Seus três ângulos medem 60° .

- **Isósceles:** possui pelo menos dois lados congruentes. Os ângulos opostos a esses lados também são congruentes e são chamados ângulos da base.
- **Escaleno:** possui os três lados com medidas diferentes; consequentemente, seus três ângulos também têm medidas diferentes.

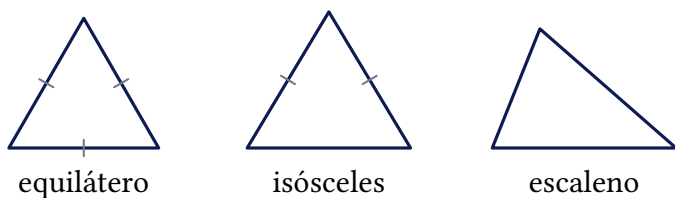


Figura 27.6: Classificação dos triângulos quanto aos lados. Marcas iguais indicam lados congruentes.

No triângulo isósceles, a mediana relativa à base também é altura, bissetriz e mediatriz. No equilátero, essa coincidência ocorre a partir de qualquer vértice; por isso, baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro são o mesmo ponto.

Neste livro, adotamos a definição inclusiva de isósceles: um triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles. Ainda assim, mantemos os nomes separados na classificação quando queremos destacar que os três lados são iguais.

Classificação quanto aos ângulos

- **Acutângulo:** possui os três ângulos agudos, isto é, menores que 90° .
- **Retângulo:** possui um ângulo reto. Os lados que formam esse ângulo são os catetos; o lado oposto é a hipotenusa.
- **Obtusângulo:** possui um ângulo obtuso, maior que 90° e menor que 180° .

Como a soma dos ângulos internos é 180° , um triângulo não pode ter dois ângulos retos nem dois ângulos obtusos.

Se a é o maior lado e b, c são os outros dois, a comparação

$$a^2 \quad \text{com} \quad b^2 + c^2$$

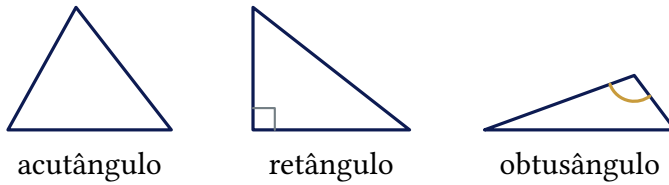


Figura 27.7: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

permite reconhecer o tipo do triângulo:

$$\begin{aligned} a^2 < b^2 + c^2 &\Rightarrow \text{acutângulo,} \\ a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow \text{retângulo,} \\ a^2 > b^2 + c^2 &\Rightarrow \text{obtusângulo.} \end{aligned}$$

27.2.2 Existência e comparação de lados

Nem toda escolha de três medidas forma um triângulo. Cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois. De modo equivalente, para lados a , b e c ,

$$|b - c| < a < b + c,$$

e relações análogas valem para os demais lados. Por exemplo, medidas 2, 3 e 6 não formam um triângulo, pois $2 + 3 < 6$.

Há também uma correspondência entre lados e ângulos: o maior lado fica oposto ao maior ângulo, e o menor lado fica oposto ao menor ângulo. Em particular, dois lados são congruentes se, e somente se, os ângulos opostos a eles são congruentes. Essa observação explica por que o triângulo isósceles possui ângulos da base iguais.

27.2.3 Soma dos ângulos internos

Proposição 27.1 (Soma dos ângulos internos do triângulo). *Em qualquer triângulo,*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Uma forma de compreender esse resultado é traçar, pelo vértice superior, uma reta paralela ao lado oposto. Os outros dois ângulos do triângulo reaparecem como alternos internos e, juntos ao ângulo do vértice, formam um ângulo raso.

Como consequência, um **ângulo externo** de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Essa relação costuma evitar contas desnecessárias com o terceiro ângulo.

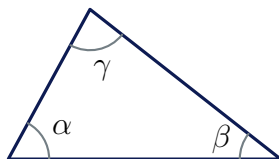


Figura 27.8: Ângulos internos de um triângulo.

27.2.4 Congruência

Proposição 27.2 (Congruência de triângulos). *Dois triângulos são congruentes quando têm a mesma forma e o mesmo tamanho. Para garantir isso, basta verificar um dos critérios:*

- **LLL:** os três lados correspondentes são congruentes;
- **LAL:** dois lados e o ângulo compreendido são congruentes;
- **ALA:** um lado e os dois ângulos adjacentes são congruentes;
- **LAA:** um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto são congruentes.

Em triângulos retângulos, também usamos o caso **HC**: hipotenusa e um cateto correspondentes congruentes.

Em cada critério, a ordem da correspondência importa: no caso LAL, por exemplo, o ângulo conhecido deve estar entre os dois lados conhecidos. Uma vez provada a congruência, todos os lados e ângulos correspondentes são iguais. Já conhecer apenas os três ângulos não determina o tamanho do triângulo; determina apenas sua forma, isto é, sua semelhança.

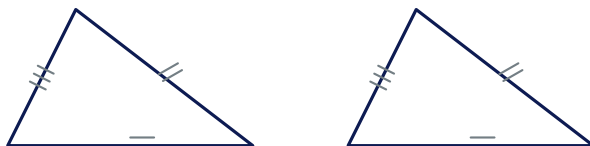


Figura 27.9: Congruência: mesmas medidas (por exemplo, LLL) implicam mesma forma e tamanho.

27.2.5 Área de triângulos

A altura relativa a uma base é a distância perpendicular do vértice oposto à reta que contém essa base. Assim,

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Em triângulos obtusângulos, o pé da altura pode cair fora do lado, mas a fórmula permanece válida.

Quando conhecemos os três lados a , b e c , podemos usar a fórmula de Heron. Com o semiperímetro

$$p = \frac{a + b + c}{2},$$

temos

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

No triângulo equilátero de lado l , a altura divide a figura em dois triângulos retângulos e mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

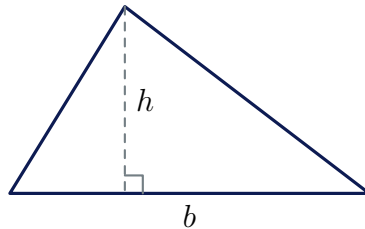


Figura 27.10: Área do triângulo: $A = \frac{bh}{2}$.

27.2.6 Elementos notáveis

Em um triângulo, são importantes:

- a **mediana** liga um vértice ao ponto médio do lado oposto; as três medianas concorrem no **baricentro**, que divide cada uma na razão 2 : 1 a partir do vértice;

- a **bissetriz** divide um ângulo em duas partes iguais; as três bissetrizes internas concorrem no **incentro**, ponto equidistante dos lados e centro da circunferência inscrita;
- a **mediatriz** é perpendicular a um lado em seu ponto médio; as três mediatrizes concorrem no **circuncentro**, ponto equidistante dos vértices e centro da circunferência circunscrita;
- a **altura** parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto, ou ao seu prolongamento; as três alturas concorrem no **ortocentro**.

O baricentro e o incentro ficam sempre no interior do triângulo. O circuncentro e o ortocentro podem ficar no interior, sobre o triângulo ou no exterior, conforme o triângulo seja acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Se r é o raio da circunferência inscrita, R é o raio da circunferência circunscrita e p é o semiperímetro, a área do triângulo também pode ser escrita como

$$A = pr \quad \text{e} \quad A = \frac{abc}{4R}.$$

A primeira igualdade surge ao decompor o triângulo em três triângulos de altura r . A relação de Euler entre o incentro I e o circuncentro O é

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Como $OI^2 \geq 0$, obtemos $R \geq 2r$, com igualdade apenas no triângulo equilátero.

Bissetriz interna (relação)

Se a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ encontra BC em D , então

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Exemplo

Em $\triangle ABC$, $AB = 6$, $AC = 9$ e a bissetriz de $\hat{A}$ encontra BC em D . Determine a razão $BD : DC$.

Solução

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

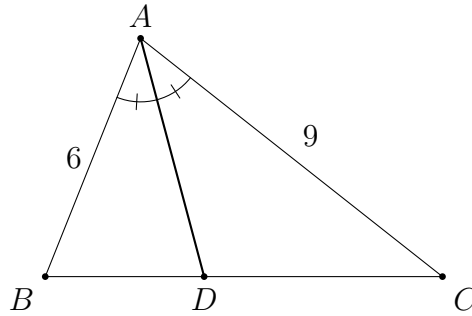


Figura 27.11: Bissetriz interna AD : os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ são iguais.

27.2.7 Teorema de Pitágoras

Se $\triangle ABC$ é retângulo em A , então

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

O lado BC , oposto ao ângulo reto, é a hipotenusa; os outros dois são os catetos. A recíproca também vale: se o quadrado do maior lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

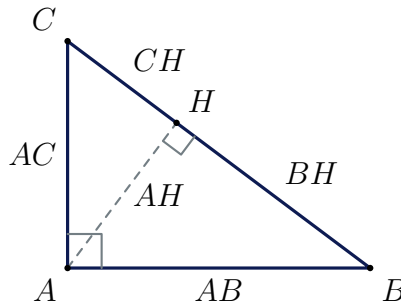


Figura 27.12: Triângulo retângulo em A e altura AH à hipotenusa BC .

Além disso, se H é o pé da altura em BC , valem as relações métricas clássicas:

$$AB^2 = BH \cdot BC, \quad AC^2 = CH \cdot BC, \quad AH^2 = BH \cdot CH.$$

Demonstração (por área)

Considere um quadrado de lado $(a + b)$, composto por quatro cópias de um triângulo retângulo de catetos a e b e por um quadrado central de lado c (a hipotenusa). Comparando as áreas:

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

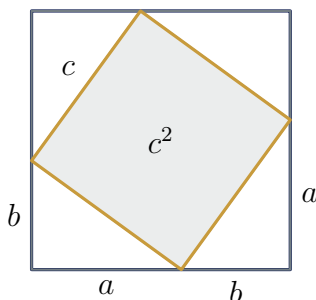


Figura 27.13: Demonstração clássica por decomposição de área: $c^2 = a^2 + b^2$.

27.2.8 Semelhança**Ideia**

Semelhança transforma comprimentos em **razões** constantes. Dois triângulos são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais. Para provar isso, não é preciso verificar todas as medidas: bastam os critérios AA (dois ângulos correspondentes iguais), LAL proporcional (dois pares de lados proporcionais e o ângulo compreendido igual) ou LLL proporcional.

Se dois triângulos são semelhantes com razão k , então:

- lados correspondentes satisfazem $\frac{a'}{a} = k$;
- perímetros estão na razão k ;
- áreas estão na razão k^2 .

Uma consequência importante é o **teorema da base média**: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade dele. Reciprocamente, uma paralela a um lado que passa pelo ponto médio de outro lado também divide o terceiro lado ao meio.

Exemplo (Tales)

Em $\triangle ABC$, um segmento $DE \parallel BC$ corta AB em D e AC em E . Se $AD = 4$, $AB = 10$ e $BC = 15$, calcule DE .

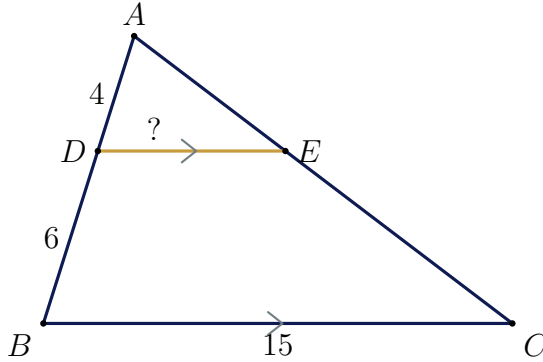


Figura 27.14: Aplicação do Teorema de Tales: $DE \parallel BC$ gera triângulos semelhantes.

Solução

Por Tales,

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = 15 \cdot \frac{2}{5} = 6.$$

27.2.9 Teoremas de Ceva e Menelau

Os dois teoremas trabalham com razões nos lados de um triângulo, mas respondem a perguntas diferentes. Ceva reconhece quando três cevianas passam por um mesmo ponto; Menelau reconhece quando três pontos, situados nas retas dos lados, pertencem a uma mesma reta.

Teorema de Ceva

Uma **ceviana** é um segmento que parte de um vértice e encontra o lado oposto, ou seu prolongamento. No triângulo ABC , sejam $D \in BC$, $E \in CA$ e $F \in AB$. As cevianas AD , BE e CF são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

As medianas fornecem o exemplo mais imediato: cada uma divide o lado oposto na razão $1 : 1$, e o produto das três razões é 1. Assim, Ceva confirma que as medianas concorrem no baricentro.

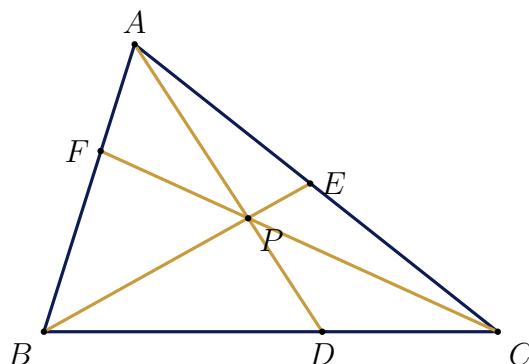


Figura 27.15: Teorema de Ceva: as três cevianas são concorrentes em P .

Uma demonstração elegante usa áreas. Como P pertence às três cevianas,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABP]}{[ACP]}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{[BCP]}{[ABP]}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{[ACP]}{[BCP]},$$

onde $[XYZ]$ representa a área do triângulo XYZ . Ao multiplicar as três igualdades, todas as áreas se cancelam.

Teorema de Menelau

No triângulo ABC , sejam D , E e F pontos pertencentes, respectivamente, às retas BC , CA e AB . Os pontos D , E e F são colineares se, e somente se,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1,$$

quando usamos segmentos orientados. Se trabalhamos apenas com comprimentos positivos, o valor absoluto do produto é 1; nesse caso, um dos pontos está no prolongamento de um lado.

Ceva e Menelau têm fórmulas muito parecidas, mas a figura revela qual deles usar: **três retas encontrando-se em um ponto** sugerem Ceva; **três pontos alinhados** sugerem Menelau. O sinal negativo em Menelau registra justamente a presença de um ponto em um prolongamento.

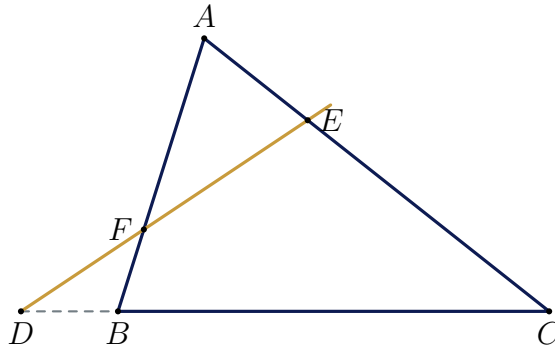


Figura 27.16: Teorema de Menelau: a transversal encontra AB , AC e o prolongamento de BC .

27.3 Quadriláteros

Todo quadrilátero convexo pode ser dividido por uma diagonal em dois triângulos; por isso, a soma de seus ângulos internos é 360° . As famílias abaixo não são isoladas: um quadrado é, ao mesmo tempo, retângulo, losango e paralelogramo. Reconhecer essa hierarquia permite herdar propriedades sem demonstrá-las novamente.

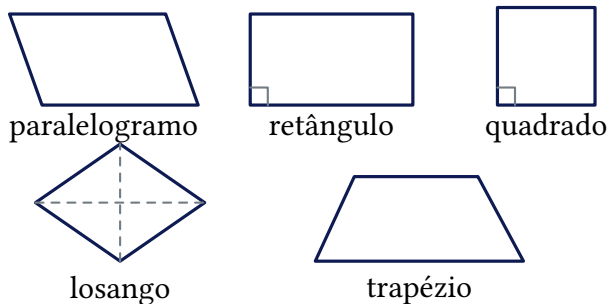


Figura 27.17: Principais famílias de quadriláteros. As formas podem compartilhar propriedades.

27.3.1 Paralelogramo

Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos. Suas propriedades principais são:

- lados opostos são congruentes;

- ângulos opostos são congruentes;
- as diagonais se bisseçam.

A área pode ser obtida por $A = bh$. Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se bisseçam, então ele é um paralelogramo. Esse critério é muito útil quando a figura não apresenta lados paralelos de modo evidente.

27.3.2 Retângulo

É um paralelogramo com quatro ângulos retos. As diagonais são congruentes e se bisseçam. A área é $A = bh$.

27.3.3 Quadrado

É um retângulo com quatro lados congruentes (ou um losango com quatro ângulos retos). Diagonais congruentes, perpendiculares e bissetrizes dos ângulos. A área é $A = l^2$.

27.3.4 Losango

É um paralelogramo com quatro lados congruentes. As diagonais são perpendiculares e bisseçam os ângulos. Uma fórmula útil é

$$A = \frac{d_1 d_2}{2},$$

onde d_1 e d_2 são as diagonais.

27.3.5 Trapézio

É um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos (as bases B e b). A área é

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos é a base média do trapézio e mede

$$m = \frac{B + b}{2}.$$

Assim, a área também pode ser escrita como $A = mh$. No trapézio isósceles, os lados não paralelos são congruentes e os ângulos da mesma base são iguais.

Aqui adotamos a definição inclusiva, “pelo menos um par”. Quando um problema reserva a palavra trapézio para quadriláteros com exatamente um par de lados paralelos, essa convenção deve ser indicada.

27.4 Polígonos

27.4.1 Diagonais

Um polígono de n lados tem

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonais. De cada vértice partem $n-3$ diagonais: não contamos o próprio vértice nem os dois vizinhos. Como cada diagonal foi contada a partir de suas duas extremidades, dividimos o total por 2.

27.4.2 Soma dos ângulos internos

Um polígono convexo de n lados tem soma dos ângulos internos

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Isso ocorre porque as diagonais traçadas a partir de um vértice dividem o polígono em $n-2$ triângulos. Já a soma de um ângulo externo em cada vértice, todos tomados no mesmo sentido, é sempre 360° .

27.4.3 Polígonos regulares

Se o polígono é regular, cada ângulo interno mede

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Cada ângulo externo e cada ângulo central medem

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

Se P é o perímetro e a é o apótema, isto é, a distância do centro a um lado, a decomposição do polígono em n triângulos congruentes fornece

$$A = \frac{Pa}{2}.$$

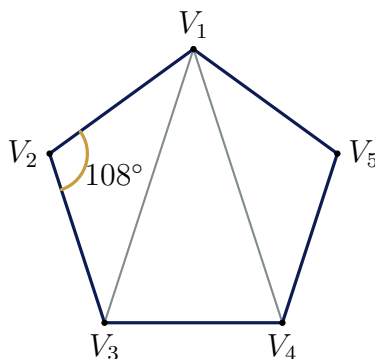


Figura 27.18: Pentágono regular: ângulo interno de 108° e as diagonais que partem de V_1 .

27.5 Circunferência e Círculo

27.5.1 Elementos fundamentais

Antes de nomear os elementos, convém separar duas ideias. A **circunferência** é somente a linha curva fechada: seus pontos estão todos à mesma distância de um ponto fixo O , chamado **centro**. O **círculo** é a região formada pela circunferência e por todos os pontos de seu interior.

Os elementos fundamentais podem ser reconhecidos diretamente na figura:

- o **raio** é o segmento que parte do centro e termina na circunferência; todos os raios de uma mesma circunferência têm a mesma medida r ;
- a **corda** é um segmento com as duas extremidades na circunferência;
- o **diâmetro** é uma corda que passa pelo centro. Ele é a maior corda da circunferência e mede $2r$;
- o **arco** é uma parte da própria circunferência compreendida entre dois pontos;
- a **secante** é uma reta que atravessa a circunferência, encontrando-a em dois pontos;
- a **tangente** é uma reta que possui um único ponto em comum com a circunferência, chamado ponto de tangência.

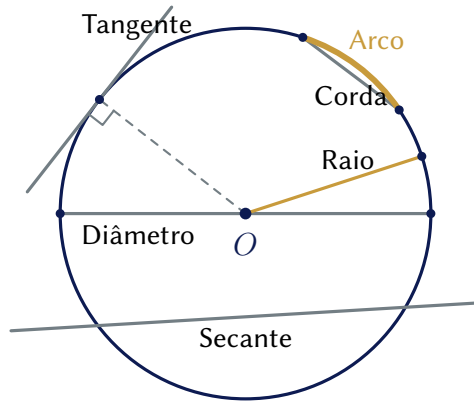


Figura 27.19: Os elementos fundamentais reunidos em uma mesma circunferência.

Observe uma diferença importante: a corda é apenas o segmento contido entre dois pontos da circunferência; a secante é uma reta completa e continua para os dois lados. Do mesmo modo, todo diâmetro é uma corda, mas nem toda corda é um diâmetro.

Cada corda determina dois arcos: um **arco menor** e um **arco maior**. Quando os extremos da corda formam um diâmetro, cada arco é uma semicircunferência. Cordas congruentes determinam arcos congruentes. Além disso, a perpendicular traçada do centro a uma corda divide a corda e o arco correspondente em duas partes iguais.

Se d é a distância do centro a uma reta, sua posição fica determinada pela comparação com o raio: a reta é exterior quando $d > r$, tangente quando $d = r$ e secante quando $d < r$. No ponto de tangência, o raio é perpendicular à reta tangente.

27.5.2 Ângulos na circunferência

- Ângulo central = medida do arco correspondente.
- Ângulo inscrito = metade do arco correspondente.
- Ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são iguais.

Se o arco subtendido é uma semicircunferência, sua medida é 180° ; portanto, todo ângulo inscrito que enxerga um diâmetro mede 90° . Esse é o teorema de Tales na circunferência.

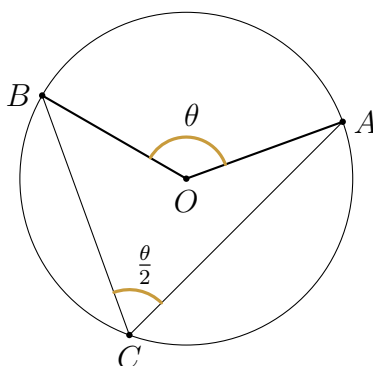


Figura 27.20: Ângulo central θ e ângulo inscrito $\frac{\theta}{2}$ subtendendo o mesmo arco $\widehat{AB}$.

Um quadrilátero é **inscrit** ou **cíclico** quando seus quatro vértices pertencem à mesma circunferência. Nesse caso, os ângulos opostos são suplementares. De fato, cada um mede a metade de um arco e os dois arcos correspondentes completam 360° .

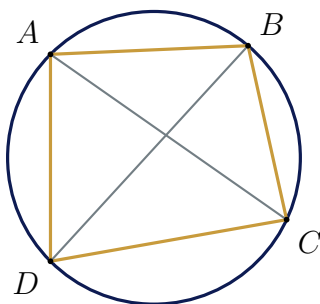


Figura 27.21: Quadrilátero cíclico: vértices na circunferência e diagonais AC e BD .

Proposição 27.3 (Teorema de Ptolomeu).

Em todo quadrilátero cíclico $ABCD$, vale:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

A igualdade afirma que o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. A recíproca também é verdadeira: se um quadrilátero convexo satisfaz essa igualdade, então ele é cíclico.

Cordas e secantes

Quando as cordas AC e BD se cruzam em um ponto interior P , o ângulo formado depende de dois arcos:

$$m(\angle APB) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}.$$

Quando duas secantes PAB e PCD partem de um ponto exterior, com A e C mais próximos de P , usamos a diferença dos arcos:

$$m(\angle APC) = \frac{m(\widehat{BD}) - m(\widehat{AC})}{2}.$$

A mesma ideia da diferença vale para uma secante e uma tangente com vértice exterior.

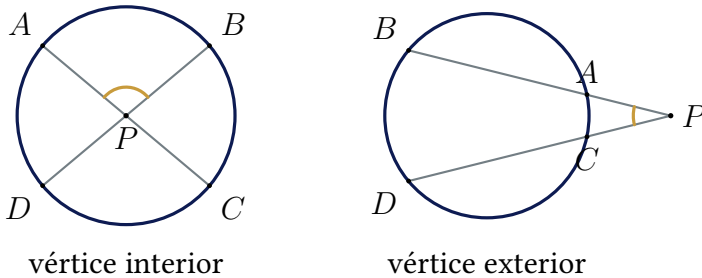


Figura 27.22: Ângulos formados por cordas no interior e por secantes no exterior.

Tangência

A tangente em um ponto T é perpendicular ao raio OT . Além disso, o ângulo entre a tangente e uma corda é igual ao ângulo inscrito que subtende o mesmo arco (teorema tangente–corda).

De um mesmo ponto exterior P , os dois segmentos tangentes têm o mesmo comprimento. Se os pontos de tangência são T e U , então

$$PT = PU.$$

Além disso, OP é bissetriz do ângulo $\angle TPU$.

Em um quadrilátero circunscrito a uma circunferência, os quatro lados são tangentes. Somando pares de segmentos tangentes a partir de cada vértice, obtemos o teorema de Pitot: as somas dos comprimentos de lados opostos são iguais.

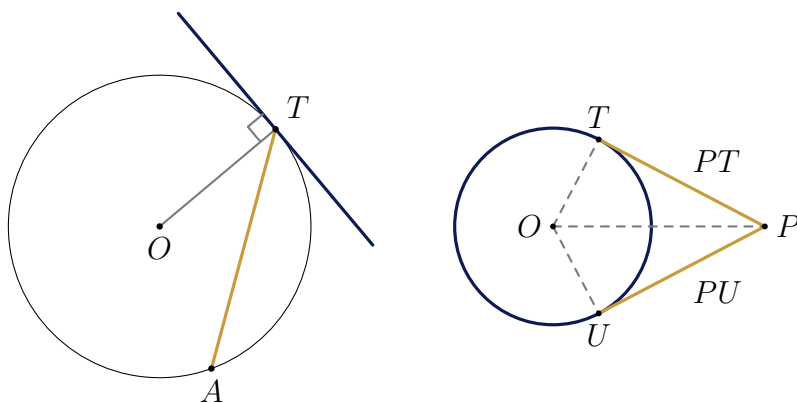


Figura 27.23: Tangência: o raio é perpendicular à tangente e, de um mesmo ponto exterior, $PT = PU$.

Potência de um ponto (aplicação)

A potência de um ponto reúne três configurações sob a mesma ideia de produto constante:

- se duas cordas AB e CD se cruzam em um ponto interior P ,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD;$$

- se duas secantes PAB e PCD partem de um ponto exterior P ,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD;$$

- se de P traçamos uma tangente PT e uma secante PAB , então

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

No último caso, o segmento tangente aparece duas vezes no produto, pois os dois pontos de interseção da secante coincidem em T .

Exemplo

De um ponto P externo, uma secante corta a circunferência em A e B , com $PA = 4$ e $PB = 9$. Calcule o comprimento da tangente PT .

Solução

$$PT^2 = PA \cdot PB = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow PT = 6.$$

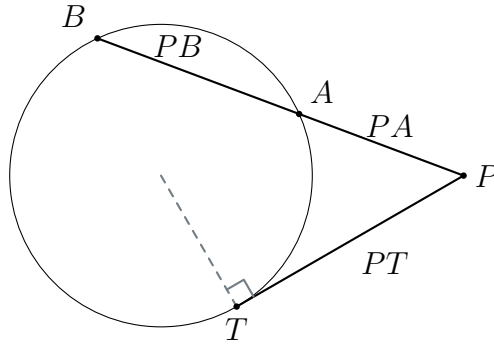


Figura 27.24: Potência de um ponto: secante e tangente a partir de P .

27.5.3 Posições relativas entre circunferências

Se duas circunferências têm raios $R \geq r$ e a distância entre seus centros é d , então:

- $d > R + r$: são exteriores e não possuem ponto comum;
- $d = R + r$: são tangentes exteriormente;
- $R - r < d < R + r$: são secantes e possuem dois pontos comuns;
- $d = R - r$: são tangentes interiormente;
- $d < R - r$: uma está no interior da outra, sem ponto comum.

Quando $d = 0$, as circunferências são concêntricas; se também têm o mesmo raio, elas coincidem.

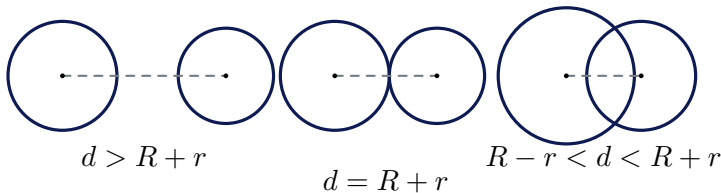


Figura 27.25: Três posições relativas: exteriores, tangentes exteriormente e secantes.

27.5.4 Comprimento da circunferência

A circunferência de raio r tem comprimento

$$C = 2\pi r.$$

Em particular, um arco que subtende ângulo central θ (em radianos) tem comprimento $s = r\theta$. Se o ângulo for dado em graus, usamos a fração que ele representa da volta completa:

$$s = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r.$$

27.5.5 Área do círculo

O círculo de raio r tem área

$$A = \pi r^2.$$

Um setor circular de ângulo central θ possui área

$$A_{\text{setor}} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

quando θ está em graus, ou $A_{\text{setor}} = \frac{r^2\theta}{2}$ quando está em radianos.

O **setor circular** é limitado por dois raios e um arco. O **segmento circular** é limitado por uma corda e pelo arco correspondente; sua área pode ser obtida subtraindo da área do setor a área do triângulo central. Já uma **coroa circular**, limitada por circunferências concêntricas de raios R e r , tem área

$$A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2).$$

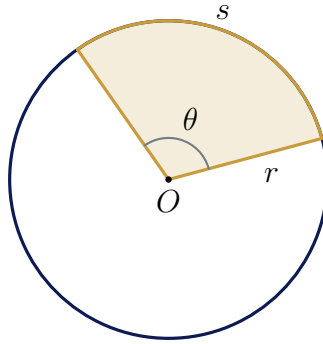


Figura 27.26: Setor circular de raio r , ângulo central θ e arco de comprimento s .

27.6 Áreas Planas e Problemas Integradores

27.6.1 Figuras compostas

Em problemas reais, a figura raramente vem “pronta”. A ideia é reconhecer partes conhecidas (triângulos, retângulos, trapézios, setores circulares) e somar/subtrair áreas.

27.6.2 Decomposição

Uma estratégia padrão é **decompor** a figura em peças simples (ou **completar** para uma figura maior) e depois ajustar o que sobrou.

Fórmulas básicas

- Triângulo: $A = \frac{bh}{2}$.
- Paralelogramo: $A = bh$.
- Trapézio: $A = \frac{(B + b)h}{2}$.
- Círculo: $A = \pi r^2$.

Área por comparação

Se dois triângulos têm a mesma altura, suas áreas estão na razão de suas bases. Se têm a mesma base, as áreas estão na razão das alturas.

27.6.3 Problemas

Aqui o foco é escolher a decomposição certa e manter o controle das contas.

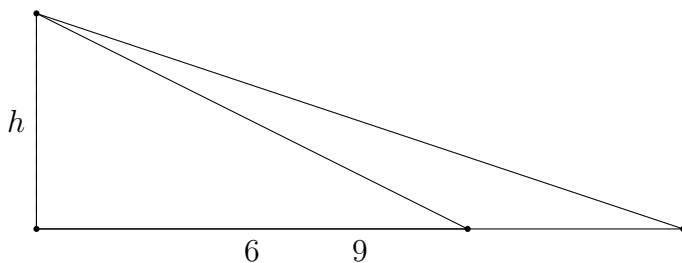


Figura 27.27: Com a mesma altura h , a razão das áreas é a razão das bases.

Exemplo (razão de áreas)

Dois triângulos têm a mesma altura e bases medindo 6 e 9. Qual a razão entre suas áreas?

Solução

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

27.7 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Em um triângulo, dois ângulos medem 35° e 65° . Calcule o terceiro.
2. Em um polígono convexo de 12 lados, calcule a soma dos ângulos internos.

Aplicação

3. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD = 3$, $AB = 8$ e $BC = 20$. Calcule DE .
4. Um triângulo retângulo tem catetos 9 e 12. Calcule a hipotenusa e a área.

Domínio

- Um ângulo inscrito mede 38° . Qual a medida do arco correspondente?
- Uma secante a partir de P intercepta a circunferência em A e B com $PA = 5$ e $PB = 20$. Calcule o comprimento da tangente PT .

Coroação

- Dois triângulos semelhantes têm razão de semelhança 3. Determine a razão entre suas áreas.
- (Cocíclico) Mostre que, em um quadrilátero inscrito, ângulos opostos são suplementares.
- (Ceva) No triângulo ABC , os pontos $D \in BC$, $E \in CA$ e $F \in AB$ são tais que AD , BE e CF concorrem. Sabendo que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{4}{5},$$

determine $\frac{AF}{FB}$.

- (Menelau) Uma transversal encontra AB em F , AC em E e o prolongamento de BC em D . Usando comprimentos positivos, sabe-se que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{4}{5}.$$

Determine $\frac{AF}{FB}$.

27.8 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- ponto, reta, segmento, ângulos e paralelismo;
- classificação dos triângulos, desigualdade triangular, congruência, área, pontos notáveis e relações métricas;
- semelhança, teorema de Tales e os teoremas de Ceva e Menelau;
- quadriláteros, suas principais famílias e propriedades visuais;
- polígonos: diagonais, ângulos internos, externos e centrais;
- circunferência: elementos, ângulos, Ptolomeu, cordas, secantes, tangência, potência e posições relativas;
- áreas: fórmulas, setores circulares e comparação.

CAPÍTULO 28

Trigonometria: Razões Trigonométricas

Motivação 28.1

A trigonometria nasce de um problema bem concreto: relacionar **ângulos** e **medidas**. No triângulo retângulo, as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) permitem transformar uma informação angular em uma informação de comprimento (e vice-versa). Isso aparece em alturas inacessíveis, inclinações, navegação, física e, claro, em muitos exercícios clássicos.

Contexto histórico 28.1

As primeiras tabelas trigonométricas surgem em problemas de astronomia e cartografia. Gregos, indianos e árabes desenvolveram técnicas para calcular comprimentos e ângulos com precisão crescente. Mais tarde, com a consolidação da análise e das funções, seno e cosseno deixam de ser apenas razões em triângulos e passam a ser funções definidas para quaisquer ângulos. Neste capítulo, vamos começar pelo cenário mais importante no Ensino Médio: o **triângulo retângulo**.

28.1 Triângulo retângulo e nomenclatura

Considere um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com ângulo reto em C . Escolhendo o ângulo agudo $\hat{A} = \theta$, chamamos:

- AB : **hipotenusa** (lado oposto ao ângulo reto);
- AC : **cateto adjacente** a θ ;

- BC : **cateto oposto** a θ .

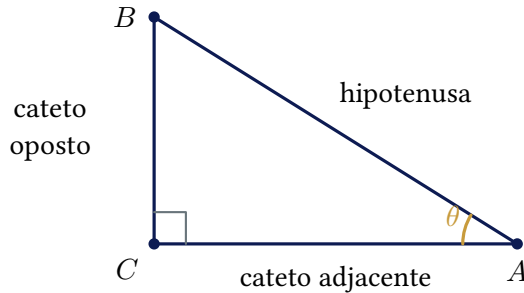


Figura 28.1: Nomenclatura em um triângulo retângulo em função do ângulo θ .

Os nomes **oposto** e **adjacente** dependem do ângulo escolhido. Se tomamos o outro ângulo agudo, $\hat{B} = \varphi$, os catetos trocam de papel: AC passa a ser oposto a φ , enquanto BC passa a ser adjacente. A hipotenusa continua sendo AB , pois é sempre o lado oposto ao ângulo reto.

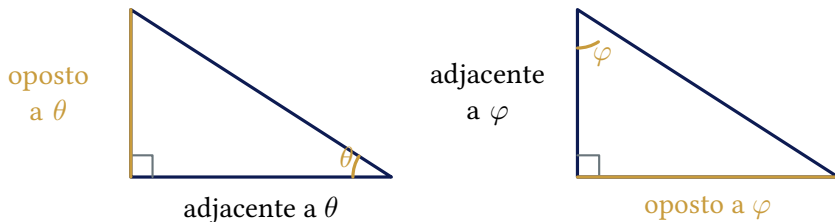


Figura 28.2: Ao mudar o ângulo de referência, os catetos oposto e adjacente trocam de papel.

28.2 Razões trigonométricas

Proposição 28.1 (Definições no triângulo retângulo). *Se θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, definimos:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, & \cos \theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.\end{aligned}$$

Essas razões não dependem do tamanho do triângulo. Dois triângulos retângulos que possuem o mesmo ângulo agudo θ são semelhantes pelo critério AA; portanto, seus lados correspondentes são proporcionais. É essa semelhança que garante que $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$ tenham sempre o mesmo valor para um mesmo ângulo.

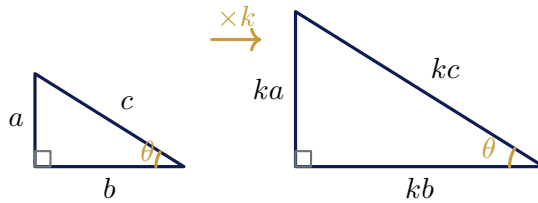


Figura 28.3: Ao multiplicar todos os lados por k , as razões permanecem: $ka/kc = a/c$ e $ka/kb = a/b$.

28.2.1 Seno

Ideia: mede quão “alto” o triângulo fica, em proporção à hipotenusa.

Exemplo

No triângulo retângulo, $AB = 10$ (hipotenusa) e $BC = 6$ (cateto oposto a $\theta = \hat{A}$). Calcule $\sin \theta$.

Solução

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

28.2.2 Cosseno

Ideia: mede quão “projetado na base” o triângulo fica, em proporção à hipotenusa.

Exemplo

No triângulo retângulo, $AB = 13$ (hipotenusa) e $AC = 5$ (cateto adjacente a $\theta = \hat{A}$). Calcule $\cos \theta$.

Solução

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}.$$

28.2.3 Tangente

Ideia: compara diretamente “altura” e “base” (oposto/adjacente).

Exemplo

No triângulo retângulo, $BC = 9$ (oposto) e $AC = 12$ (adjacente) ao ângulo $\theta = \widehat{A}$. Calcule $\operatorname{tg} \theta$.

Solução

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Para ângulos agudos, os catetos são menores que a hipotenusa. Assim,

$$0 < \operatorname{sen} \theta < 1, \quad 0 < \cos \theta < 1, \quad \operatorname{tg} \theta > 0.$$

A tangente não precisa ser menor que 1: ela é igual a 1 em 45° , menor que 1 para ângulos abaixo de 45° e maior que 1 para ângulos acima de 45° .

28.2.4 As três razões na mesma figura

Se tomamos um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1, as definições ficam especialmente transparentes: o cateto oposto mede $\operatorname{sen} \theta$ e o cateto adjacente mede $\cos \theta$. A tangente continua comparando os dois catetos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}.$$

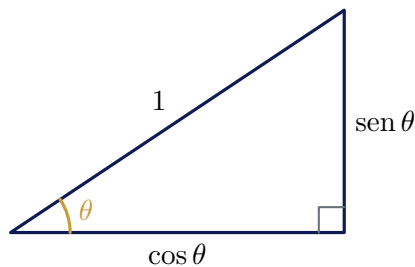


Figura 28.4: No triângulo de hipotenusa unitária, seno e cosseno aparecem como comprimentos.

Em um triângulo semelhante com hipotenusa c , cateto oposto a e cateto adjacente b , basta multiplicar esses comprimentos por c :

$$a = c \operatorname{sen} \theta, \quad b = c \cos \theta, \quad a = b \operatorname{tg} \theta.$$

Essas igualdades não são novas fórmulas: são apenas as definições reorganizadas. Elas explicam por que o seno está ligado à altura, o cosseno à projeção horizontal e a tangente à inclinação.

Quando θ cresce de 0° para 90° , mantendo a hipotenusa fixa, o cateto oposto aumenta e o adjacente diminui. Por isso, nesse intervalo, $\sin \theta$ aumenta, $\cos \theta$ diminui e $\operatorname{tg} \theta$ aumenta cada vez mais rapidamente.

28.2.5 Valores notáveis (primeiro quadrante)

Os valores de 30° , 45° e 60° não precisam ser apenas memorizados. Eles surgem de dois triângulos especiais.

O triângulo de 45°

Um quadrado de lado 1, cortado por uma diagonal, produz um triângulo retângulo isósceles. Pelo Teorema de Pitágoras, sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$. Portanto,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

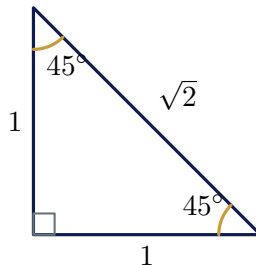


Figura 28.5: Triângulo 45° – 45° – 90° .

Os triângulos de 30° e 60°

Ao dividir um triângulo equilátero de lado 2 por sua altura, obtemos dois triângulos retângulos com hipotenusa 2, cateto menor 1 e cateto maior $\sqrt{3}$. Logo,

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

e, trocando os papéis dos catetos,

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

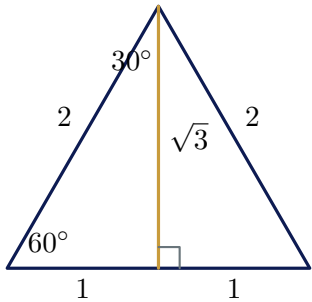


Figura 28.6: A altura do equilátero produz triângulos 30°–60°–90°.

Ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n/d

Os valores de 0° e 90° antecipam a extensão das razões trigonométricas ao ciclo trigonométrico. No triângulo retângulo trabalhamos com ângulos agudos; no ciclo, veremos que $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ e $\cos 90^\circ = 0$. Como a tangente é $\operatorname{sen} \theta / \cos \theta$, ela não está definida em 90°.

28.3 Relações úteis

28.3.1 Identidade fundamental no triângulo retângulo

Se os catetos medem a e b e a hipotenusa mede c , então

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{b}{c}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Dividindo essa igualdade por c^2 , obtemos a **identidade fundamental**:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1.$$

Aqui, $\operatorname{sen}^2 \theta$ significa $(\operatorname{sen} \theta)^2$. Essa relação permite encontrar o seno a partir do cosseno, ou o cosseno a partir do seno, quando conhecemos o quadrante do ângulo.

Dividindo a definição de seno pela definição de cosseno, obtemos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad (\operatorname{cos} \theta \neq 0).$$

28.3.2 Complementares

Em um triângulo retângulo, se θ e φ são os ângulos agudos, então $\varphi = 90^\circ - \theta$. Pela troca de papéis de cateto oposto e adjacente:

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{cos} \varphi, \quad \operatorname{cos} \theta = \operatorname{sen} \varphi, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

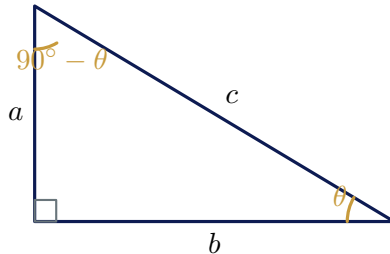


Figura 28.7: Ângulos complementares trocam os papéis dos catetos.

28.4 Resolução de triângulos retângulos

Resolver um triângulo significa determinar seus lados e ângulos desconhecidos. A razão deve envolver a medida conhecida e a medida procurada:

- oposto e hipotenusa: seno;
- adjacente e hipotenusa: cosseno;
- oposto e adjacente: tangente.

Em um triângulo retângulo, conhecer um lado e um ângulo agudo determina todo o triângulo: o outro ângulo é o complementar, e os dois lados restantes podem ser obtidos pelas razões trigonométricas. Se conhecemos dois lados, o terceiro vem do Teorema de Pitágoras e um dos ângulos vem de uma razão inversa.

28.4.1 Encontrando um comprimento

Uma escada de 5 m forma um ângulo de 60° com o chão. Desprezando a espessura da escada, qual altura h ela alcança na parede?

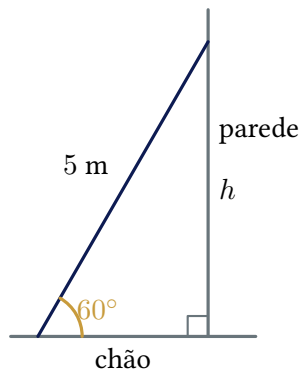


Figura 28.8: A escada é a hipotenusa; a altura procurada é o cateto oposto.

Como conhecemos a hipotenusa e procuramos o cateto oposto,

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{5} \quad \Rightarrow \quad h = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ m.}$$

28.4.2 Encontrando um ângulo

Se conhecemos uma razão e queremos o ângulo, usamos a operação inversa. Por exemplo, se uma rampa sobe 3 m enquanto avança 4 m horizontalmente,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}.$$

Em uma calculadora configurada em graus,

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{4} \right) \approx 36,87^\circ.$$

As notações $\arcsen$, $\arccos$ e $\arctg$ representam as funções inversas; elas devolvem o ângulo a partir do valor da razão.

Ao usar a calculadora, convém conferir se ela está no modo de graus. Também é melhor guardar algumas casas decimais durante os cálculos e arredondar apenas a resposta final. Em um desenho coerente, a hipotenusa deve continuar sendo o maior lado e o maior ângulo deve ficar oposto ao maior lado.

28.4.3 Inclinação e porcentagem

Em rampas, ruas e telhados, a inclinação costuma ser dada em porcentagem. Se uma rampa sobe v metros enquanto avança h metros na horizontal, então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{h} \quad \text{e} \quad \text{inclinação percentual} = 100 \cdot \frac{v}{h} = 100 \operatorname{tg} \theta.$$

Assim, uma inclinação de 8% significa subir 8 unidades a cada 100 unidades horizontais; ela não significa um ângulo de 8° . Nesse caso,

$$\theta = \arctg(0,08) \approx 4,57^\circ.$$

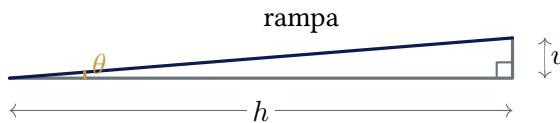


Figura 28.9: A porcentagem de inclinação compara a subida vertical com o avanço horizontal.

28.4.4 Ângulos de elevação e depressão

O **ângulo de elevação** é medido da horizontal para cima; o **ângulo de depressão**, da horizontal para baixo. Como as horizontais são paralelas, o ângulo de depressão observado do alto é igual ao ângulo de elevação visto do solo, por alternância de ângulos internos.



Figura 28.10: Ângulos de elevação e depressão determinados por horizontais paralelas.

Exemplo

Do alto de um farol de 30 m, o ângulo de depressão até um barco é 25° . Como esse ângulo é igual ao ângulo de elevação visto do barco, se d é a distância horizontal até o farol, então

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{30}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{30}{\operatorname{tg} 25^\circ} \approx 64,3 \text{ m.}$$

Perceba que a linha de visada é a hipotenusa, mas a distância pedida é horizontal; por isso, a tangente relaciona diretamente as duas medidas relevantes.

28.5 Triângulos quaisquer

As razões trigonométricas nasceram no triângulo retângulo, mas também permitem resolver triângulos que não possuem ângulo reto. Para isso, usamos duas relações centrais. Adotaremos a convenção usual: os lados a , b e c ficam opostos, respectivamente, aos ângulos A , B e C .

28.5.1 Lei dos Senos

Proposição 28.2 (Lei dos Senos). *Em todo triângulo ABC ,*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Cada lado é comparado com o seno do ângulo que está diante dele.

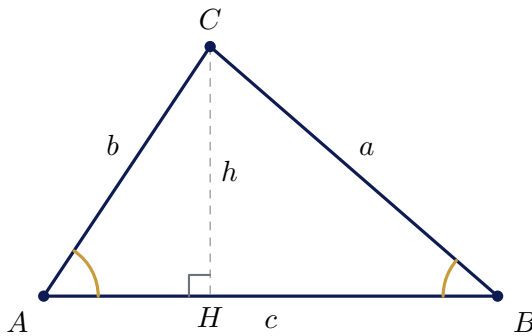


Figura 28.11: A altura CH transforma o triângulo em dois triângulos retângulos.

Demonstração. Pelo triângulo retângulo ACH ,

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \operatorname{sen} A.$$

Pelo triângulo retângulo BCH ,

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a \operatorname{sen} B.$$

Como as duas expressões representam a mesma altura,

$$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Traçando uma altura a partir de outro vértice, obtemos de modo análogo a igualdade com $c/\operatorname{sen} C$, completando a demonstração. Se o triângulo for obtusângulo, a altura pode encontrar o prolongamento de um lado; o argumento permanece válido porque $\operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} A$.

A Lei dos Senos é especialmente útil quando conhecemos um par lado-ângulo oposto e mais um lado ou ângulo. Por exemplo, se $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ e $a = 6$, então

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Rightarrow b = 6 \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = 6\sqrt{2}.$$

28.5.2 Lei dos Cossenos

Proposição 28.3 (Lei dos Cossenos). *Em todo triângulo ABC ,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Cada fórmula relaciona um lado com os outros dois e com o cosseno do ângulo compreendido entre eles.

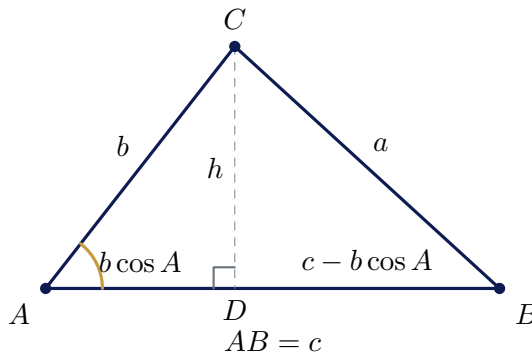


Figura 28.12: Decomposição usada na demonstração da Lei dos Cossenos.

Demonstração. No triângulo retângulo ACD ,

$$AD = b \cos A \quad \text{e} \quad h = b \operatorname{sen} A.$$

Logo, $DB = c - b \cos A$. Aplicando Pitágoras ao triângulo BCD ,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + DB^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

As outras duas formas surgem escolhendo B ou C como ângulo de referência. A mesma identidade permanece válida nos triângulos obtusângulos, considerando a projeção sobre o prolongamento do lado.

Quando $A = 90^\circ$, temos $\cos A = 0$ e a fórmula se reduz a $a^2 = b^2 + c^2$: o Teorema de Pitágoras aparece como caso particular da Lei dos Cossenos. Em geral, usamos essa lei quando conhecemos dois lados e o ângulo entre eles, ou quando conhecemos os três lados e queremos determinar um ângulo.

Exemplo

Dois lados de um triângulo medem 5 e 7, e o ângulo entre eles mede 60° . Se x é o lado oposto a esse ângulo,

$$x^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 60^\circ = 25 + 49 - 35 = 39.$$

Portanto, $x = \sqrt{39}$.

28.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20 e o cateto oposto ao ângulo θ mede 12. Calcule $\sin \theta$.
2. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 25 e o cateto adjacente ao ângulo θ mede 7. Calcule $\cos \theta$.
3. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 e um dos ângulos agudos mede 30° . Determine os dois catetos.

Aplicação

4. Um triângulo retângulo tem catetos 9 e 40. Calcule a tangente do ângulo cujo cateto oposto mede 9.

5. Um poste projeta uma sombra de 8 m em um terreno plano. No mesmo instante, o ângulo de elevação do Sol é 30° . Determine a altura do poste.
6. Uma rampa avança 25 m na horizontal e possui inclinação de 12%. Determine a subida vertical e o ângulo que a rampa forma com a horizontal, com aproximação de centésimos de grau.

Domínio

7. Prove que, para um ângulo agudo θ em um triângulo retângulo, vale $\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$.
8. Se $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$ e θ é agudo, determine $\operatorname{cos} \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$.
9. Dois lados de um triângulo medem 8 e 11, e o ângulo compreendido entre eles mede 60° . Use a Lei dos Cossenos para determinar o terceiro lado.

Coroação

10. Sem consultar a tabela, use um triângulo equilátero de lado 2 para deduzir $\operatorname{sen} 30^\circ$, $\operatorname{cos} 30^\circ$ e $\operatorname{tg} 30^\circ$.
11. Dois pontos A e B estão alinhados com a base de uma torre, no mesmo lado, e distam 20 m entre si. Do ponto mais próximo A , o ângulo de elevação do topo é 45° ; do ponto B , é 30° . Determine a altura da torre, desprezando a altura dos observadores.
12. Em um triângulo ABC , sabe-se que $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ e que o lado a , oposto a A , mede 6. Use a Lei dos Senos para determinar o lado b , oposto a B .

28.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- nomenclatura (hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente);
- definições de $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$ e sua justificativa por semelhança;
- dedução dos valores notáveis nos triângulos de 30° , 45° e 60° ;
- identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, relação da tangente e complementaridade;
- resolução de triângulos, razões inversas, inclinação percentual e problemas de elevação e depressão;
- Lei dos Senos e Lei dos Cossenos para resolver triângulos quaisquer.

CAPÍTULO 29

Ciclo Trigonométrico

Motivação 29.1

Quando o ângulo deixa de ser apenas o ângulo agudo de um triângulo retângulo, precisamos de um novo “palco”. O **ciclo trigonométrico** permite definir seno e cosseno para qualquer arco, incluindo ângulos maiores que 90° , várias voltas e ângulos negativos. Com ele, os sinais, as simetrias e os valores notáveis deixam de ser regras isoladas: todos passam a ser vistos em uma única figura.

Contexto histórico 29.1

A passagem das razões em triângulos para as funções seno e cosseno em um círculo unitário consolida a trigonometria como linguagem universal para movimentos periódicos. Essa ideia aparece com força na astronomia e, séculos depois, na física matemática, no estudo de ondas, vibrações e circuitos. No Ensino Médio, o ciclo trigonométrico é a ferramenta que organiza sinais, simetrias e cálculos rápidos.

29.1 Arcos orientados

Fixamos como origem dos arcos o ponto $A = (1, 0)$. A partir dele, o sentido anti-horário é considerado **positivo**, e o sentido horário, **negativo**. Assim, um arco não registra somente uma abertura: ele também informa um sentido de percurso.

Arcos diferentes podem terminar no mesmo ponto. Por exemplo, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$ e $-\frac{5\pi}{3}$ têm a mesma extremidade, pois diferem por voltas completas. Dizemos que são **arcos côngruos** ou **congruentes**.

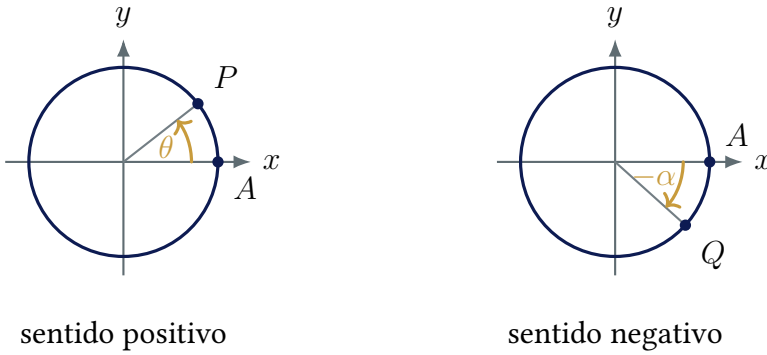


Figura 29.1: A orientação distingue arcos percorridos em sentidos opostos.

Em geral,

$$\theta \text{ e } \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

determinam o mesmo ponto no ciclo.

29.2 Medida em radianos

Considere, em uma circunferência de raio r , um arco de comprimento s . A medida do ângulo central em **radianos** é

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Portanto, um radiano é a medida do ângulo central que subtende um arco cujo comprimento é igual ao raio.

No ciclo trigonométrico, o raio vale 1. Nesse caso, $\theta = s$: numericamente, a medida do arco em radianos coincide com seu comprimento. Como uma volta completa tem comprimento $2\pi r$, temos

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \text{e} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

Daí seguem as conversões

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{graus}} \frac{\pi}{180} \quad \text{e} \quad \theta_{\text{graus}} = \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}.$$

Exemplo

Para converter 150° em radianos,

$$150^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}.$$

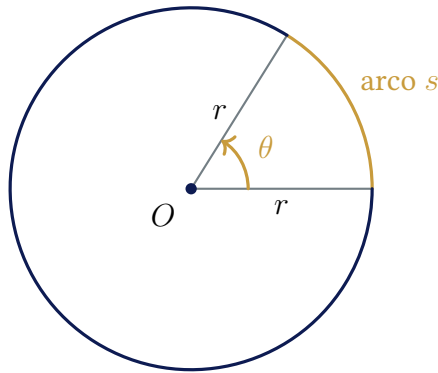


Figura 29.2: A medida em radianos compara o comprimento do arco com o raio.

No sentido inverso,

$$\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ.$$

29.3 O ciclo e suas coordenadas

O **ciclo trigonométrico** é a circunferência de centro na origem e raio 1. A cada arco θ corresponde um ponto P do ciclo. Suas coordenadas definem o cosseno e o seno:

$$P = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta).$$

Isso significa que o cosseno é a projeção de P sobre o eixo horizontal, enquanto o seno é sua projeção sobre o eixo vertical.

Como todo ponto do ciclo satisfaz $x^2 + y^2 = 1$, a substituição $x = \cos \theta$ e $y = \operatorname{sen} \theta$ fornece

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$$

Essa é a origem geométrica da identidade fundamental da trigonometria.

A tangente é definida, quando $\cos \theta \neq 0$, por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}.$$

Ela não existe nos pontos do eixo vertical, isto é, para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

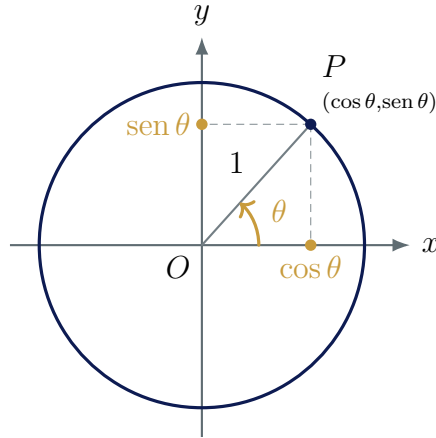


Figura 29.3: Seno e cosseno são lidos diretamente nas projeções do ponto P .

29.4 Quadrantes e sinais

Os eixos dividem o ciclo em quatro quadrantes. Como cosseno e seno são, respectivamente, a abscissa e a ordenada de P , seus sinais vêm da posição do ponto, e não de uma regra separada.

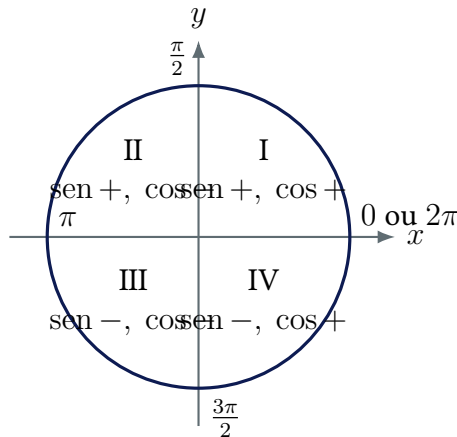


Figura 29.4: Os sinais são os sinais das coordenadas do ponto no ciclo.

Como $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen} \theta / \operatorname{cos} \theta$, a tangente é positiva nos quadrantes I e III e negativa nos quadrantes II e IV.

Nos eixos, obtemos imediatamente:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen } \theta$	0	1	0	-1	0
$\text{cos } \theta$	1	0	-1	0	1

29.5 Valores notáveis

Os triângulos notáveis estudados no capítulo anterior fornecem as coordenadas dos pontos correspondentes a 30° , 45° e 60° . No primeiro quadrante, temos:

Ângulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n/d

O ciclo funciona como um mapa de posições. Para obter valores em qualquer quadrante, combinamos o arco de referência com a tabela do primeiro quadrante e os sinais das coordenadas.

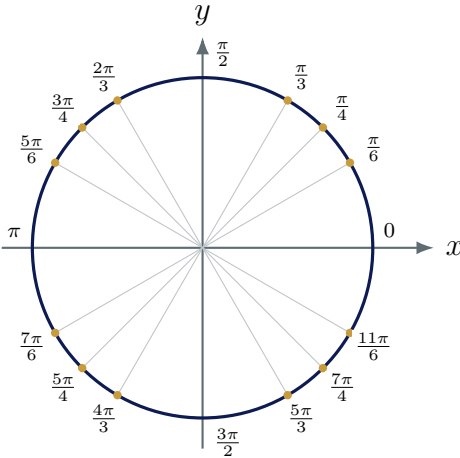


Figura 29.5: Posição dos arcos notáveis em uma volta.

29.6 Arco de referência e simetrias

O **arco de referência** é o ângulo agudo α formado pelo lado terminal do arco com o eixo x . Ele permite comparar um ponto de qualquer quadrante com um ponto do primeiro quadrante.

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, os arcos

$$\alpha, \quad \pi - \alpha, \quad \pi + \alpha, \quad 2\pi - \alpha$$

produzem pontos cujas coordenadas têm os mesmos valores absolutos. O que muda são os sinais.

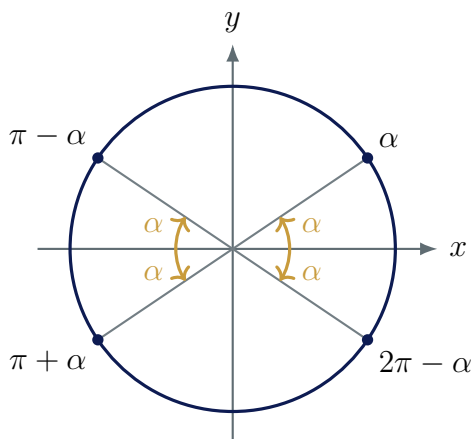


Figura 29.6: Quatro pontos associados ao mesmo arco de referência.

Pela leitura das coordenadas, obtemos:

arco	sen	cos
α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$
$\pi - \alpha$	$\text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$

As relações não precisam ser decoradas isoladamente: basta localizar o quadrante, encontrar α e ler os sinais das coordenadas.

Exemplo 1

Como $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, o arco está no segundo quadrante e seu arco de referência é $\frac{\pi}{6}$. Logo,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 2

Para calcular $\operatorname{sen}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$, acrescentamos uma volta completa:

$$-\frac{13\pi}{6} + 2\pi = -\frac{\pi}{6}.$$

Esse arco termina no quarto quadrante e tem referência $\frac{\pi}{6}$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

29.7 Periodicidade

Quando acrescentamos uma volta completa, o ponto do ciclo não muda. Assim,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen} \theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Seno e cosseno têm período 2π .

Uma meia-volta troca simultaneamente os sinais das duas coordenadas. Na razão entre elas, os sinais se cancelam; por isso,

$$\operatorname{tg}(\theta + k\pi) = \operatorname{tg} \theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sempre que a tangente estiver definida. Seu período é π .

As simetrias em relação aos eixos também mostram que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta.$$

29.8 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Converta para radianos: (a) 30° ; (b) 120° ; (c) 225° .
2. Determine o quadrante de: (a) $\frac{2\pi}{3}$; (b) $-\frac{3\pi}{4}$; (c) $\frac{11\pi}{6}$.

Aplicação

3. Calcule: (a) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; (b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
4. Simplifique usando as simetrias e a periodicidade: (a) $\sin(\theta + 2\pi)$; (b) $\cos(\pi - \theta)$; (c) $\operatorname{tg}(\pi + \theta)$.

Domínio

5. Mostre que $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ e $\cos(-\theta) = \cos \theta$ usando simetria no ciclo.
6. Sabendo que $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que θ está no segundo quadrante, determine $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$.

Coroação

7. Mostre que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ utilizando a equação da circunferência de raio 1.
8. Resolva, no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0.$$
9. Mostre que $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$, considerando que $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ e utilizando as simetrias do seno e do cosseno.
10. Determine as coordenadas do ponto do ciclo associado a $\frac{17\pi}{6}$ e explique por que esse ponto também corresponde a $-\frac{7\pi}{6}$.
11. Um ponto P do segundo quadrante pertence ao ciclo e tem abscissa $-\frac{3}{5}$. Determine sua ordenada e os valores de $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$ para o arco associado.
12. Sem recorrer à tabela completa do ciclo, determine

$$\sin\left(\frac{23\pi}{4}\right), \quad \cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{29\pi}{6}\right),$$

indicando, em cada caso, o arco cômruo em $[0, 2\pi)$ e o arco de referênria.

29.9 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- orientação de arcos e medida em radianos;
- arcos côngruos e voltas completas;
- seno e cosseno como coordenadas de um ponto do ciclo;
- quadrantes, sinais e valores notáveis;
- arco de referência, simetrias e periodicidade.

CAPÍTULO 30

Identidades e Equações Trigonométricas

Motivação 30.1

Até aqui, usamos seno, cosseno e tangente para calcular valores e reduzir arcos. Agora vamos dar o próximo passo: aprender a transformar expressões por meio de identidades trigonométricas e a resolver equações envolvendo $\sin$, $\cos$ e $\tan$. As fórmulas não serão tratadas como uma coleção para decorar. Veremos de onde vêm e em quais condições podem ser usadas.

Contexto histórico 30.1

As identidades trigonométricas são uma forma compacta de registrar simetrias do círculo e relações geométricas fundamentais. Com o desenvolvimento do cálculo e da física matemática, elas se tornaram ferramentas de manipulação algébrica tão importantes quanto fatoração e produtos notáveis. Ondas, rotações e movimentos periódicos são descritos com grande economia graças a essas relações.

30.1 Identidade e equação

Uma **identidade trigonométrica** é uma igualdade verdadeira para todos os valores em que suas expressões estão definidas. Por exemplo,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

vale para todo número real x .

Uma **equação trigonométrica**, por outro lado, é verdadeira apenas para determinados valores da incógnita. A igualdade

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

não vale para todo x ; encontrar os valores que a tornam verdadeira é justamente resolver a equação.

O domínio faz parte da identidade. A relação

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$$

é obtida porque $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, mas o lado esquerdo só existe quando $\operatorname{sen} x \neq 0$. Portanto, a igualdade é válida para todo x em que $\operatorname{sen} x \neq 0$.

30.2 Relações fundamentais

30.2.1 Identidade pitagórica

No ciclo trigonométrico, o ponto associado ao arco x tem coordenadas

$$P = (\cos x, \operatorname{sen} x).$$

Como o raio do ciclo vale 1, o triângulo formado pelas projeções de P é retângulo e tem catetos de comprimentos $|\cos x|$ e $|\operatorname{sen} x|$.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$|\cos x|^2 + |\operatorname{sen} x|^2 = 1^2.$$

Como o quadrado elimina os sinais, obtemos a identidade fundamental:

Proposição 30.1 (Identidade fundamental). *Para todo arco x ,*

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.}$$

Ela permite determinar uma razão quando conhecemos a outra, mas é necessário usar o quadrante para escolher o sinal correto.

Exemplo

Se $\cos x = \frac{3}{5}$ e x está no quarto quadrante, então

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

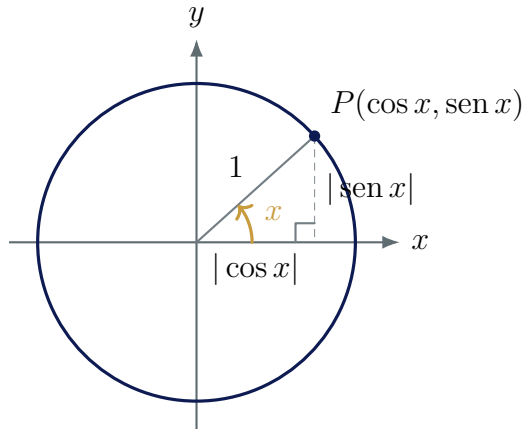


Figura 30.1: A identidade fundamental é o Teorema de Pitágoras no ciclo unitário.

Como o seno é negativo no quarto quadrante,

$$\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}.$$

30.2.2 Relações com a tangente

Quando $\cos x \neq 0$,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Dividindo a identidade fundamental por $\cos^2 x$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x},$$

isto é,

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}, \quad \cos x \neq 0.$$

O cuidado com $\cos x \neq 0$ não é um detalhe: foi por essa quantidade que dividimos.

30.3 Soma e diferença de arcos

As fórmulas de soma e diferença podem ser compreendidas a partir de uma corda do ciclo. Considere os pontos

$$P = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) \quad \text{e} \quad Q = (\cos \beta, \operatorname{sen} \beta).$$

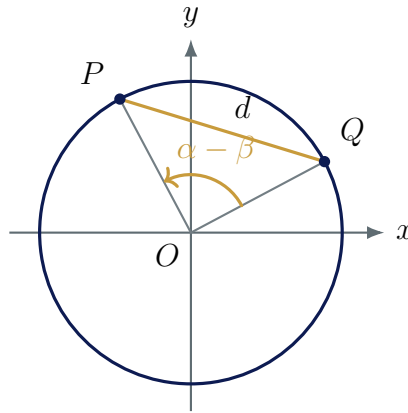


Figura 30.2: A corda PQ relaciona as coordenadas dos pontos à diferença $\alpha - \beta$.

Pela fórmula da distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Por outro lado, no triângulo POQ , a Lei dos Cossenos fornece

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos(\alpha - \beta).$$

Comparando as expressões,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Substituindo β por $-\beta$ e usando as simetrias do ciclo, obtemos a fórmula do cosseno da soma. As fórmulas do seno seguem da relação $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$.

Proposição 30.2 (Soma e diferença). *Para quaisquer arcos α e β ,*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Quando as tangentes envolvidas existem,

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

desde que o denominador do segundo membro também seja diferente de zero.

A fórmula da tangente vem da divisão de $\sin(\alpha \pm \beta)$ por $\cos(\alpha \pm \beta)$.

Exemplo

Como $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

30.4 Ângulo duplo e redução de potências

Tomando $\alpha = \beta = x$ nas fórmulas anteriores,

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

e

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}.$$

Usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, a fórmula do cosseno pode assumir três formas equivalentes:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x.$$

As duas últimas formas permitem isolar os quadrados:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}, \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}.$$

Essas relações são chamadas fórmulas de **redução de potências**.

Quando $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{tg} 2x$ estão definidas,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

30.5 Equações trigonométricas básicas

Resolver uma equação trigonométrica exige considerar a periodicidade. Uma solução encontrada no ciclo reaparece depois de cada período.

Se α é uma solução de referência, as três formas básicas são:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi, \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \iff x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

As duas soluções do seno em uma volta têm a mesma ordenada; as duas do cosseno têm a mesma abscissa.

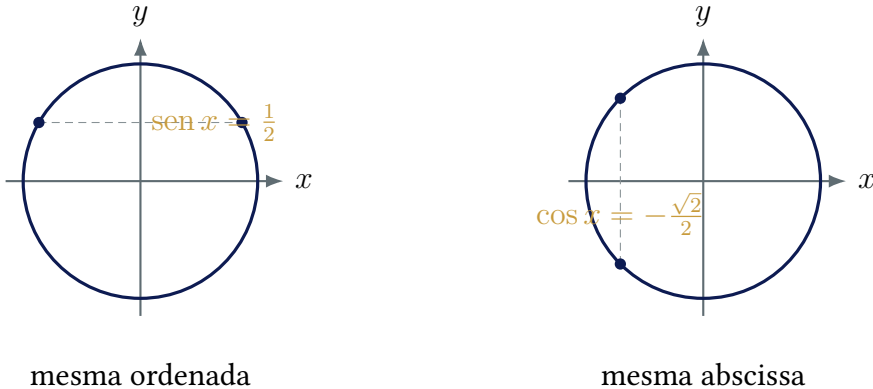


Figura 30.3: As equações com seno e cosseno são interseções com linhas horizontais e verticais.

30.5.1 Equações com seno

Para resolver $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, localizamos os dois pontos do ciclo com ordenada $\frac{1}{2}$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se o segundo membro estiver fora do intervalo $[-1, 1]$, não haverá solução real.

30.5.2 Equações com cosseno

Como $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos arcos $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$,

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Também aqui, valores fora de $[-1, 1]$ não podem ser cossenos de arcos reais.

30.5.3 Equações com tangente

No primeiro quadrante, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ em $x = \frac{\pi}{3}$. Como a tangente tem período π ,

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

30.5.4 Equações com quadrados

Ao extrair a raiz quadrada, os dois sinais devem ser considerados. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \implies \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}.$$

Em uma volta,

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Somando $2k\pi$ a esses valores, obtemos todas as soluções reais.

30.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Usando $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, determine $\operatorname{sen} \theta$ quando $\cos \theta = \frac{5}{13}$ e θ está no primeiro quadrante.
2. Mostre que $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ sempre que $\cos \theta \neq 0$.

Aplicação

3. Calcule: (a) $\cos 15^\circ$; (b) $\operatorname{sen} 105^\circ$.
4. Resolva: (a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos \theta = 0$; (c) $\operatorname{tg} \theta = -1$.

Domínio

5. Resolva $\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$.
6. Resolva $\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen} \theta$.

Coroação

7. Mostre que

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x$$

utilizando $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

8. Resolva

$$2 \sin(x + \pi) = \sqrt{3}$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

9. Demonstre, a partir das fórmulas de soma e diferença, que

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

10. Resolva, no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

30.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- a diferença entre identidade e equação trigonométrica;
- a identidade fundamental e as relações com a tangente;
- a demonstração das fórmulas de soma e diferença;
- fórmulas de ângulo duplo e redução de potências;
- soluções gerais de equações trigonométricas básicas.

CAPÍTULO 31

Exercícios de Geometria Plana e Trigonometria

Motivação 31.1

Este capítulo é um **treino concentrado** dos conteúdos dos capítulos anteriores (Geometria Plana e Trigonometria). A ideia é consolidar técnicas, ganhar velocidade e reconhecer padrões.

Aqui as figuras e as relações trigonométricas aparecem misturadas, como costuma ocorrer nos problemas mais interessantes. Comece registrando na figura os dados conhecidos; muitas soluções nascem de uma semelhança, de uma área ou de uma razão que só fica evidente depois desse primeiro desenho.

31.1 Geometria Plana

Fundamentos

1. Em um triângulo, dois ângulos medem 35° e 65° . Calcule o terceiro.
2. Em um polígono convexo de 15 lados, calcule a soma dos ângulos internos.
3. Quantas diagonais tem um polígono convexo de 20 lados?
4. Num triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede 40° . Determine as medidas dos ângulos da base.
5. Em um paralelogramo, um ângulo interno mede 68° . Determine as medidas dos outros três.

6. Um trapézio isósceles tem ângulos da base maior medindo 70° . Determine os ângulos da base menor.

Aplicação

7. Um triângulo retângulo tem catetos 9 e 12. Calcule a hipotenusa e a área.
8. Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 26 e um cateto mede 10. Determine o outro cateto.
9. Em $\triangle ABC$, um segmento $DE \parallel BC$ corta AB em D e AC em E . Se $AD = 4$, $AB = 10$ e $BC = 15$, calcule DE .
10. Em um triângulo, a bissetriz do ângulo A encontra BC em D . Se $AB = 8$ e $AC = 12$, determine $BD : DC$.
11. A área de um losango é 96 e uma diagonal mede 12. Determine a outra diagonal.
12. Um trapézio tem bases 18 e 10 e altura 7. Calcule a área.

Domínio

13. Em um círculo, um ângulo inscrito mede 38° . Qual a medida do arco correspondente?
14. De um ponto P externo a uma circunferência, uma secante intercepta a circunferência em A e B com $PA = 5$ e $PB = 20$. Calcule o comprimento da tangente PT .
15. Mostre que, em um quadrilátero inscrito, ângulos opostos são suplementares.
16. Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-a em segmentos de comprimentos 4 e 9. Determine os catetos.
17. Dois triângulos semelhantes têm razão de semelhança 3. Determine a razão entre suas áreas.

Coroação

18. (Semelhança + circunferência) Em $\triangle ABC$, a circunferência circunscrita corta a altura relativa a A novamente em H . Sendo D o pé dessa altura sobre BC , prove que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.
19. (Área) Em um triângulo ABC , pontos $D \in AB$ e $E \in AC$ satisfazem $AD : DB = 2 : 1$ e $AE : EC = 3 : 1$. Determine a razão entre as áreas de $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$.

31.2 Trigonometria

Fundamentos

20. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20 e o cateto oposto ao ângulo θ mede 12. Calcule $\sin \theta$.
21. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 25 e o cateto adjacente ao ângulo θ mede 7. Calcule $\cos \theta$.
22. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 e 40. Calcule tg do ângulo oposto ao cateto 9.
23. Converta para radianos: (a) 30° ; (b) 135° ; (c) 300° .
24. Determine o quadrante de: (a) $\frac{5\pi}{6}$; (b) $-\frac{3\pi}{4}$; (c) $\frac{11\pi}{6}$.

Aplicação

25. Calcule: (a) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; (b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
26. Simplifique usando redução: (a) $\sin(\theta + 2\pi)$; (b) $\cos(\pi - \theta)$; (c) $\operatorname{tg}(\pi + \theta)$.
27. Se $\sin \theta = \frac{3}{5}$ e θ é agudo, determine $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$.
28. Calcule $\sin 75^\circ$.
29. Calcule $\cos 15^\circ$.

Domínio

30. Resolva $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
31. Resolva $\cos \theta = 0$.
32. Resolva $\operatorname{tg} \theta = -1$.
33. Resolva $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$.
34. Resolva $\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$.

Coroação

35. Resolva a equação $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = \sin \theta$.
36. Encontre todos os θ tais que $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$.
37. Mostre que $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

31.3 Problemas integradores (Geo + Trig)**Aplicação**

38. Um poste projeta uma sombra de 8 m em um terreno plano. No mesmo instante, o ângulo de elevação do Sol é 30° . Expresse a altura do poste em função de $\operatorname{tg} 30^\circ$ e determine o valor numérico.
39. Uma escada de 5 m encostada em uma parede forma um ângulo de 60° com o chão. Determine a altura alcançada na parede.
40. Em um triângulo retângulo, o ângulo agudo θ satisfaz $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$. Determine $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

Domínio

41. Em um triângulo ABC , com $AB = AC$, o ângulo do vértice A mede 40° . Calcule $\sin 20^\circ$ em função de $\cos 40^\circ$.

42. Uma circunferência de raio 10 é tangente a duas retas concorrentes formando um ângulo de 60° . Determine a distância do centro da circunferência ao ponto de interseção das retas.

Coroação

43. (Desafio) Prove que, em qualquer triângulo, vale a Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

CAPÍTULO 32

Geometria Espacial: Fundamentos, Prismas, Cilindros e Pirâmides

Motivação 32.1

A geometria espacial amplia a geometria plana para o mundo tridimensional. Aqui, medidas como **área** e **volume** se tornam protagonistas, e a visualização vira parte do método. Neste capítulo, vamos construir as bases (ponto, reta e plano no espaço), compreender a estrutura dos poliedros e estudar três famílias fundamentais: **prismas**, **cilindros** e **pirâmides**.

Contexto histórico 32.1

Problemas de volume e mensuração aparecem desde a Antiguidade, em obras, reservatórios e impostos sobre grãos. A formalização da geometria espacial e o desenvolvimento de métodos de cálculo de áreas e volumes evoluíram com a engenharia e, mais tarde, com o cálculo integral. No Ensino Médio, a meta é dominar definições, reconhecer sólidos e aplicar fórmulas com segurança.

32.1 Fundamentos no espaço

32.1.1 Ponto, reta e plano

No espaço, um **plano** pode ser pensado como uma “superfície plana infinita”.
Relações importantes:

- duas retas podem ser **concorrentes**, **paralelas** ou **reversas**;
- uma reta pode ser **paralela** ou **perpendicular** a um plano;
- dois planos podem ser **paralelos** ou **secantes**.

32.1.2 Distâncias e seções

Duas ideias aparecem o tempo todo:

- **distância entre planos paralelos** (altura do sólido);
- **seção** (corte): a figura obtida ao cortar um sólido por um plano.

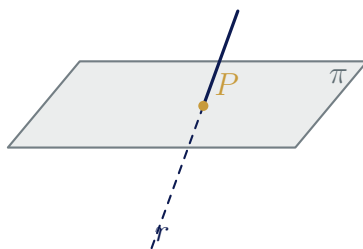


Figura 32.1: Uma reta r intersectando um plano π em um ponto P .

32.2 Poliedros, faces, arestas e vértices

Um **poliedro** é um sólido limitado por polígonos. Esses polígonos são suas **faces**; os lados compartilhados por duas faces são as **arestas**; os encontros das arestas são os **vértices**. Cubos, prismas e pirâmides são poliedros. Cilindros e cones não são, pois possuem superfícies curvas.

Em um poliedro convexo, vale a relação de Euler:

$$V - A + F = 2,$$

em que V , A e F indicam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces.

Exemplo 32.1: Relação de Euler no cubo

Um cubo possui $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. De fato,

$$8 - 12 + 6 = 2.$$

A relação funciona como uma verificação: se uma contagem não satisfaz a igualdade, alguma face, aresta ou vértice foi omitido.

Uma **planificação** abre as faces de um poliedro sobre o plano sem deformá-las. Ela permite enxergar a área total como soma de áreas planas.

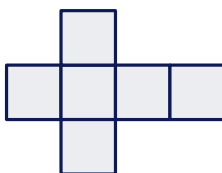


Figura 32.2: Uma das planificações possíveis do cubo: seis quadrados congruentes.

32.3 Prismas

32.3.1 Definição

Um **prisma** é um poliedro com duas faces paralelas e congruentes chamadas **bases**. As demais faces são **laterais**.

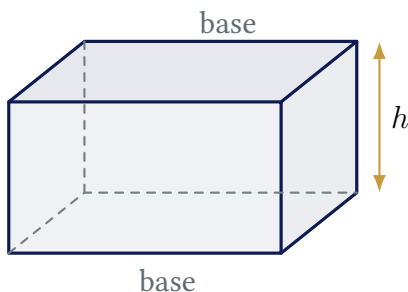
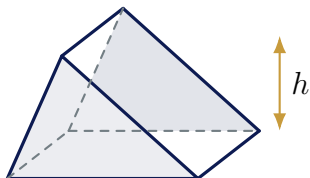
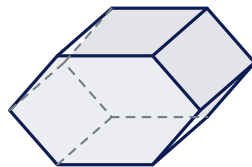


Figura 32.3: Prisma reto: bases paralelas e altura h .

32.3.2 Prismas mais comuns (visual)



Prisma triangular (reto).



Prisma de base hexagonal.

Figura 32.4: Exemplos de prismas: o tipo é determinado pela forma da base.

32.3.3 Prisma reto

No **prisma reto**, as arestas laterais são perpendiculares às bases. Seja:

- A_b : área da base;
- P_b : perímetro da base;
- h : altura.

Proposição 32.1 (Volume do prisma).

$$V = A_b h.$$

A expressão $V = A_b h$ também pode ser compreendida pelo princípio de Cavalieri: sólidos de mesma altura e com seções de mesma área em todos os níveis possuem o mesmo volume. Assim, inclinar um prisma sem alterar a base e a altura não modifica seu volume.

Proposição 32.2 (Área lateral e total do prisma reto).

$$A_L = P_b h, \quad A_T = A_L + 2A_b.$$

Exemplo

Um prisma reto de base retangular tem base 6×4 e altura 10. Calcule o volume e a área total.

Solução

$A_b = 6 \cdot 4 = 24$ e $P_b = 2(6 + 4) = 20$. Então

$$V = 24 \cdot 10 = 240, \quad A_L = 20 \cdot 10 = 200, \quad A_T = 200 + 2 \cdot 24 = 248.$$

32.4 Cilindros

32.4.1 Definição

Um **cilindro** é um sólido com duas bases circulares congruentes e paralelas. No **cilindro reto**, a altura h é a distância entre as bases. Seja r o raio da base.

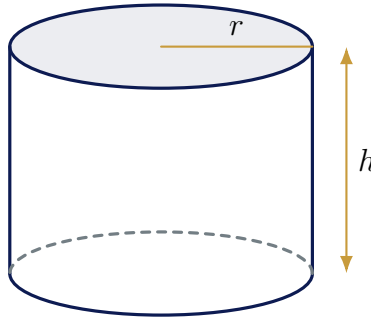


Figura 32.5: Cilindro reto: raio r e altura h .

Proposição 32.3 (Volume do cilindro).

$$V = \pi r^2 h.$$

Proposição 32.4 (Área lateral e total do cilindro reto). *A área lateral é a área de um retângulo de base $2\pi r$ e altura h :*

$$A_L = 2\pi r h.$$

A área total é

$$A_T = A_L + 2\pi r^2.$$

Exemplo

Um cilindro reto tem raio $r = 3$ e altura $h = 8$. Calcule V , A_L e A_T .

Solução

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi, \quad A_L = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi, \quad A_T = 48\pi + 2\pi \cdot 9 = 66\pi.$$

32.5 Pirâmides

32.5.1 Definição

Uma **pirâmide** é um poliedro com uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto chamado **vértice**. A **altura** h é a distância do vértice ao plano da base.

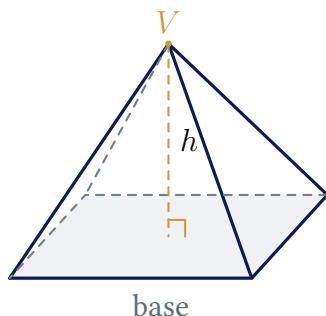


Figura 32.6: Pirâmide: base poligonal, vértice V e altura h .

Proposição 32.5 (Volume da pirâmide). *Se A_b é a área da base e h é a altura, então*

$$V = \frac{A_b h}{3}.$$

Exemplo

Uma pirâmide tem base quadrada de lado 6 e altura 10. Calcule o volume.

Solução

$A_b = 6^2 = 36$. Logo,

$$V = \frac{36 \cdot 10}{3} = 120.$$

32.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Classifique pares de retas no espaço: **concorrentes**, **paralelas** e **reversas** (desenhe um exemplo de cada).
2. Explique o que é uma **seção plana** e dê um exemplo em um prisma.
3. Cite um exemplo de: (a) reta paralela a um plano; (b) reta perpendicular a um plano; (c) dois planos paralelos.

Aplicação

4. Um prisma reto tem base triangular de área 30 e altura 12. Calcule o volume.
5. Um prisma reto tem base quadrada de lado 5 e altura 7. Calcule a área total.
6. Um cilindro reto tem raio 5 e altura 10. Calcule o volume.
7. Um cilindro reto tem raio 4 e área lateral 64π . Determine a altura.
8. Uma pirâmide tem base quadrada de lado 8 e altura 9. Calcule o volume.

Domínio

9. Um prisma reto tem base hexagonal regular de lado 4 e altura 9. Sabendo que o perímetro da base é 24, calcule a área lateral.
10. Um cilindro reto tem raio 2 e altura 6. Calcule a área total.
11. Uma pirâmide tem base triangular de área 18 e altura 15. Calcule o volume.
12. Um recipiente cilíndrico de raio 6 cm é preenchido até a altura de 20 cm. Calcule o volume de água (em cm^3).

Coroação

13. Um prisma reto e um cilindro reto têm a **mesma altura** h e a **mesma área da base** A_b . Compare seus volumes.
14. Um cone e uma pirâmide têm a mesma base (mesma área A_b) e a mesma altura h . Compare seus volumes.

32.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- relações entre ponto, reta e plano no espaço;
- poliedros, planificações e relação de Euler $V - A + F = 2$;

32. GEOMETRIA ESPACIAL: FUNDAMENTOS, PRISMAS, CILINDROS E PIRÂMIDES

- prismas: definição, volume, área lateral e área total;
- cilindros: definição, volume, área lateral e área total;
- pirâmides: elementos e volume $A_b h/3$.

CAPÍTULO 33

Geometria Espacial: Cones e Esferas

Motivação 33.1

Depois de prismas, cilindros e pirâmides, faltam dois sólidos que aparecem o tempo todo em problemas reais: **cones** e **esferas**. Além de fórmulas, vamos reforçar a leitura geométrica (raio, altura, geratriz) e conectar as áreas laterais com a ideia de **desenvolvimento** (abrir a superfície).

Contexto histórico 33.1

Cones e esferas aparecem em recipientes, peças mecânicas, arquitetura e astronomia. O estudo da esfera é antigo (área e volume já eram discutidos na tradição grega), mas as demonstrações modernas se conectam naturalmente à ideia de comparação e, mais tarde, ao cálculo. No Ensino Médio, o foco é dominar as expressões e saber escolher a fórmula certa.

33.1 Cones

33.1.1 Cone reto: definição e elementos

Um **cone reto** tem base circular de raio r e vértice alinhado com o centro da base. Chamamos de:

- h : altura;
- r : raio da base;
- g : **geratriz** (segmento do vértice a um ponto da borda da base).

No cone reto, vale a relação pitagórica

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

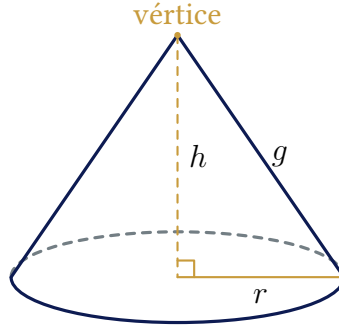


Figura 33.1: Cone reto: raio r , altura h e geratriz g .

33.1.2 Áreas e volume

Proposição 33.1 (Área lateral e área total do cone reto). *A área lateral do cone reto é*

$$A_L = \pi r g.$$

A área total é

$$A_T = A_L + \pi r^2.$$

Proposição 33.2 (Volume do cone).

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Exemplo

Um cone reto tem raio 3 e altura 4. Calcule a geratriz, a área lateral e o volume.

Solução

$$g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Logo,

$$A_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi, \quad V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi.$$

33.1.3 Tronco de cone (opcional, mas muito útil)

Um **tronco de cone** é obtido ao cortar um cone por um plano paralelo à base. Se os raios das bases são R (base maior) e r (base menor), a altura é h e a geratriz do tronco é g , então:

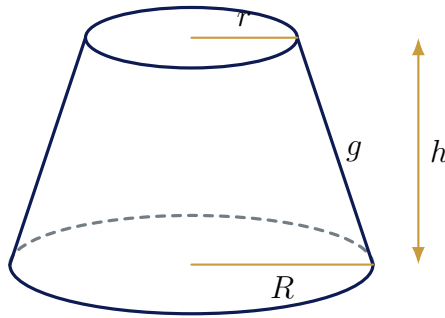


Figura 33.2: Tronco de cone: raios R e r , altura h e geratriz g .

$$A_L = \pi(R + r)g, \quad V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

33.2 Esferas

33.2.1 Definição

Uma **esfera** é o conjunto de pontos do espaço a uma distância fixa r de um ponto (centro). O sólido preenchido é a **bola**.

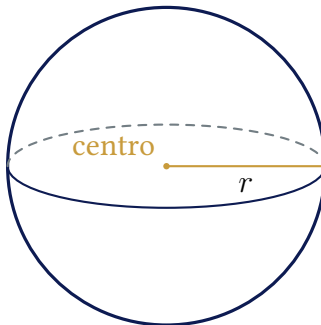


Figura 33.3: Esfera: raio r e um “equador” para dar noção de profundidade.

33.2.2 Seções planas da esfera

Quando um plano corta uma esfera, a seção obtida é um círculo. Se o plano passa pelo centro, temos um **círculo máximo**, de raio r . Se a distância do centro ao plano é d , o raio ρ da seção satisfaz

$$\rho^2 + d^2 = r^2, \quad \rho = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Essa relação vem de um triângulo retângulo formado pelo centro da esfera, pelo centro da seção e por um ponto de sua borda.

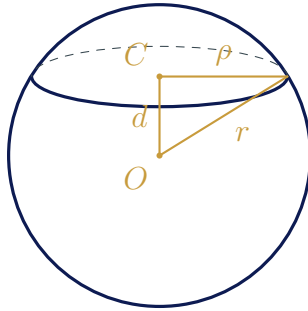


Figura 33.4: Seção plana de uma esfera: $r^2 = d^2 + \rho^2$.

33.2.3 Área e volume

Proposição 33.3 (Área da esfera).

$$A = 4\pi r^2.$$

Proposição 33.4 (Volume da esfera).

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Exemplo

Uma esfera tem raio 5. Calcule a área e o volume.

Solução

$$A = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi, \quad V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi.$$

33.3 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Um cone reto tem $r = 6$ e $h = 8$. Calcule g , A_L e V .
2. Um tronco de cone tem $R = 6$, $r = 2$ e $g = 5$. Calcule a área lateral.
3. Uma esfera tem raio 3. Calcule a área e o volume.

Aplicação

4. Um cone reto tem $A_L = 60\pi$ e $r = 6$. Determine a geratriz.
5. Um cone reto tem volume 48π e raio 4. Determine a altura.
6. Um tronco de cone tem $R = 5$, $r = 3$ e $h = 12$. Calcule o volume.
7. Uma bola tem volume 36π . Determine o raio.

Domínio

8. Um cone reto tem $r = 5$ e geratriz $g = 13$. Determine a altura e a área lateral.
9. Duas esferas têm raios 2 e 6. Determine a razão entre seus volumes.
10. Um cone e um cilindro têm o mesmo raio r e a mesma altura h . Compare seus volumes.

Coroação

11. Usando apenas a comparação de volumes e desconsiderando o empacotamento, qual é o maior número inteiro de esferas de raio 1 compatível com o volume de um cilindro de raio 3 e altura 10?
12. Uma esfera de raio r está inscrita em um cilindro reto (toca o topo, a base e a lateral). Determine a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro.

33.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- cone reto: elementos (r, h, g) e relação $g^2 = h^2 + r^2$;
- cone: área lateral, área total e volume;
- tronco de cone: fórmulas úteis de área e volume;
- esfera: seções planas, área $4\pi r^2$ e volume $\frac{4}{3}\pi r^3$.

CAPÍTULO 34

Geometria Analítica: Pontos e Retas no Plano

Motivação 34.1

A **Geometria Analítica** é a ponte entre **álgebra** e **geometria**: desenhamos no plano cartesiano e, ao mesmo tempo, descrevemos tudo por **equações**. Neste primeiro contato, vamos focar no essencial: **pontos**, **distâncias**, **ponto médio** e **retas**.

Contexto histórico 34.1

A grande ideia, popularizada por René Descartes (século XVII), foi colocar a geometria “em coordenadas”: curvas viram equações e problemas geométricos viram contas. Isso abriu caminho para aplicações em física, engenharia, computação e, mais tarde, para o cálculo.

34.1 O plano cartesiano e o ponto

Um ponto no plano é representado por um par ordenado $P(x, y)$. Chamamos x de **abscissa** e y de **ordenada**.

34.1.1 Quadrantes

Os sinais de x e y determinam em que **quadrante** o ponto está:

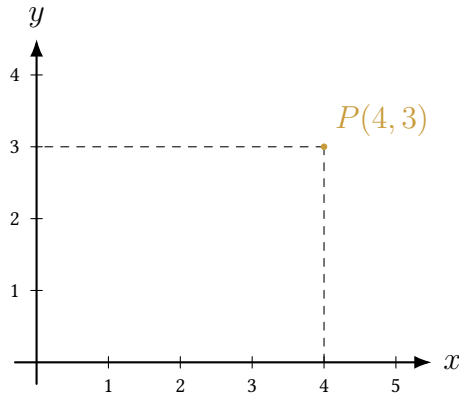


Figura 34.1: Representação de um ponto $P(x, y)$ no plano cartesiano.

Quadrante	sinais
I	$x > 0, y > 0$
II	$x < 0, y > 0$
III	$x < 0, y < 0$
IV	$x > 0, y < 0$

34.2 Distância entre dois pontos

Proposição 34.1 (Fórmula da distância no plano). *Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplo

Calcule a distância entre $A(1, 2)$ e $B(5, 5)$.

Solução

$$AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

34.3 Ponto médio de um segmento

Proposição 34.2 (Fórmula do ponto médio). *O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, com $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é*

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Exemplo

Determine o ponto médio do segmento com extremidades $A(-2, 3)$ e $B(4, -1)$.

Solução

$$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1).$$

34.4 Inclinação e equações da reta**34.4.1 Coeficiente angular (inclinação)**

Proposição 34.3 (Coeficiente angular). *Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ com $x_2 \neq x_1$, o coeficiente angular (inclinação) da reta $\overline{AB}$ é*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observação. Se $x_2 = x_1$, a reta é **vertical** e não possui coeficiente angular.

34.4.2 Equação reduzida: $y = mx + b$

Proposição 34.4 (Reta na forma reduzida). *Uma reta não vertical pode ser escrita como*

$$y = mx + b,$$

onde m é o coeficiente angular e b é o valor de y quando $x = 0$ (intercepto em y).

Exemplo

Encontre a equação da reta que passa por $A(2, 1)$ e $B(6, 5)$.

Solução

$$m = \frac{5-1}{6-2} = 1.$$

Usando $A(2, 1)$ em $y = mx + b$:

$$1 = 1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -1.$$

Logo, a reta é $y = x - 1$.

34.4.3 Forma geral: $ax + by + c = 0$

Toda reta pode ser escrita como

$$ax + by + c = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$.

Proposição 34.5 (Reta vertical). *Uma reta vertical tem equação*

$$x = k.$$

34.4.4 Forma ponto–inclinação

Se uma reta de coeficiente angular m passa por $P(x_0, y_0)$, qualquer outro ponto (x, y) da reta satisfaz

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m.$$

Assim,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Essa forma evita procurar o intercepto antes da hora. Por exemplo, a reta de inclinação -2 que passa por $(3, 1)$ pode ser escrita como

$$y - 1 = -2(x - 3),$$

ou, depois de simplificar, $y = -2x + 7$.

34.4.5 Retas paralelas e perpendiculares

Duas retas não verticais são **paralelas** quando possuem o mesmo coeficiente angular:

$$m_1 = m_2.$$

Elas são **perpendiculares** quando suas inclinações satisfazem

$$m_1 m_2 = -1.$$

Portanto, se uma reta tem coeficiente $m \neq 0$, uma reta perpendicular a ela tem coeficiente $-\frac{1}{m}$. As retas vertical e horizontal também são perpendiculares entre si.

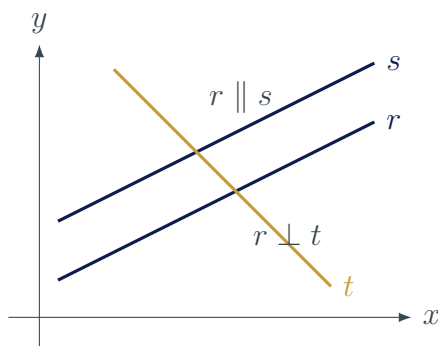


Figura 34.2: Paralelismo preserva a inclinação; perpendicularidade troca o coeficiente por seu oposto recíproco.

34.4.6 Distância de um ponto a uma reta

Se $P(x_0, y_0)$ e a reta r tem equação $ax + by + c = 0$, a menor distância entre P e r é medida pelo segmento perpendicular:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

O numerador mede quanto o ponto se afasta da equação da reta; o denominador corrige esse valor para que a distância não dependa da forma equivalente escolhida para a equação.

34.5 Interseção de duas retas

Para encontrar o ponto de interseção, montamos um **sistema** com as duas equações.

Exemplo

Encontre o ponto de interseção de $r : y = 2x + 1$ e $s : y = -x + 7$.

Solução

$$2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2.$$

Então

$$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

O ponto de interseção é $(2, 5)$.

34.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Identifique o quadrante (ou eixo) de cada ponto: (a) $(-3, 2)$; (b) $(4, -1)$; (c) $(0, 5)$; (d) $(-2, -7)$.
2. Calcule a distância entre $A(0, 0)$ e $B(6, 8)$.
3. Encontre o ponto médio do segmento com extremidades $A(3, -2)$ e $B(-1, 6)$.
4. Calcule o coeficiente angular da reta que passa por $A(1, 4)$ e $B(5, 0)$.

Aplicação

5. Encontre a equação da reta que passa por $P(0, -3)$ e tem coeficiente angular $m = 2$.
6. Encontre a equação da reta que passa por $A(-2, 1)$ e $B(4, 3)$.
7. Determine o ponto de interseção das retas $y = 3x - 2$ e $y = -2x + 8$.
8. Uma reta passa por $(1, 2)$ e é paralela à reta $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Encontre sua equação.

Domínio

9. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 3)$ é retângulo.
10. Determine k para que os pontos $A(1, k)$, $B(3, 5)$ e $C(7, 9)$ sejam colineares.
11. Encontre a equação da reta perpendicular a $y = 4x - 1$ que passa por $(2, 3)$.

Coroação

12. Considere a família de retas $r_t : y = tx + 1$. Determine o conjunto de pontos de interseção de r_t com a reta $s : y = -x + 4$, quando t varia em $\mathbb{R}$.

13. Se $A(1, 2)$ e $B(5, 6)$, determine a equação do **lugar geométrico** dos pontos $P(x, y)$ tais que $PA = PB$.

34.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- pontos no plano cartesiano e quadrantes;
- distância entre dois pontos: $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$;
- ponto médio de um segmento;
- coeficiente angular e equações da reta ($y = mx + b$, $ax + by + c = 0$);
- forma ponto–inclinação, paralelismo e perpendicularidade;
- distância de um ponto a uma reta;
- interseção de retas via sistema.

CAPÍTULO 35

Geometria Analítica: Circunferência e Lugares Geométricos

Motivação 35.1

Depois de pontos e retas, a próxima figura que aparece naturalmente no plano é a **circunferência**. O motivo é simples: circunferência é **distância constante**. Neste capítulo, vamos transformar essa ideia em **equações** e usar sistemas para estudar **interseções** e **tangências**.

Contexto histórico 35.1

A linguagem de lugares geométricos (“conjunto de pontos que satisfazem uma condição”) é antiga, mas a versão analítica ficou poderosa com o plano cartesiano. Quando uma condição geométrica vira uma equação, conseguimos resolver o problema com álgebra.

35.1 Lugares geométricos (ideia geral)

Um **lugar geométrico** é o conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem uma condição. A estratégia padrão é:

1. traduzir a condição para uma igualdade (geralmente com distância);
2. escrever a condição em termos de x e y ;
3. simplificar até chegar numa equação conhecida.

35.2 Circunferência: definição e equação reduzida

Proposição 35.1 (Definição de circunferência). *Dado um ponto $C(a, b)$ e um raio $r > 0$, a **circunferência** de centro C e raio r é o conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que $PC = r$.*

Pela fórmula da distância,

$$PC = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado, obtemos a **equação reduzida**:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

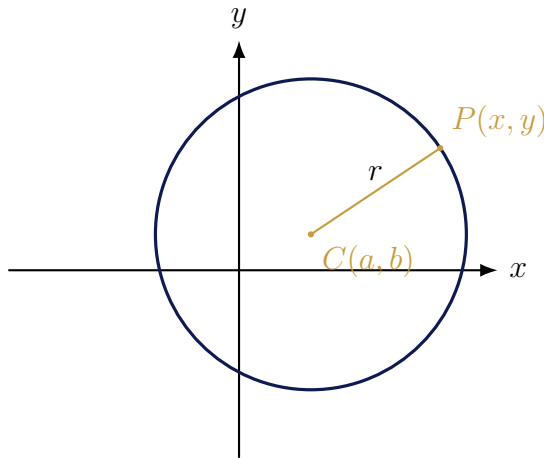


Figura 35.1: Circunferência: conjunto de pontos $P(x, y)$ a distância r do centro $C(a, b)$.

Exemplo

Escreva a equação da circunferência de centro $C(2, -1)$ e raio 3.

Solução

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

35.3 Equação geral e completar quadrados

Ao expandir a forma reduzida, obtemos uma forma equivalente:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Proposição 35.2 (Centro e raio na forma geral). *Se*

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

então o centro é $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ e

$$r^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F.$$

(Quando $r^2 > 0$, a circunferência existe.)

Exemplo

Determine centro e raio de $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Solução Agrupando e completando quadrados:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 12$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 12$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Logo, $C(2, -3)$ e $r = 5$.

35.4 Interseção entre reta e circunferência

Para encontrar os pontos de interseção entre uma reta e uma circunferência, resolvemos um **sistema** com as duas equações.

Exemplo

Encontre os pontos de interseção entre

$$\text{reta } r : y = x \quad \text{e} \quad \text{circunferência } \gamma : x^2 + y^2 = 8.$$

Solução Substituindo $y = x$ na circunferência:

$$x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Como $y = x$, os pontos são $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

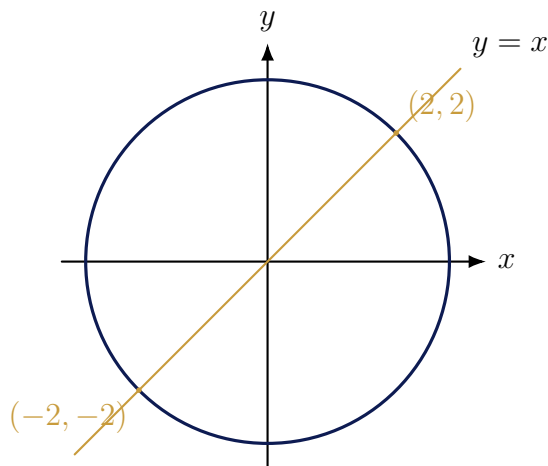


Figura 35.2: Reta secante: duas interseções entre a reta e a circunferência.

35.5 Tangência e distância do ponto à reta

Um jeito eficiente de decidir se uma reta é **secante**, **tangente** ou **externa** a uma circunferência é comparar:

- d : distância do centro C à reta;
- r : raio da circunferência.

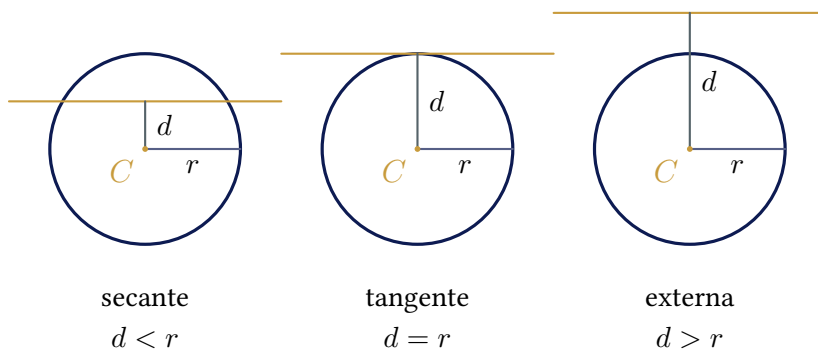


Figura 35.3: Posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência: secante, tangente e externa.

Proposição 35.3 (Distância do ponto à reta). *Se a reta é $ax + by + c = 0$ e o ponto é $C(x_0, y_0)$, então*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Proposição 35.4 (Critério de posição relativa). *Para a circunferência de centro C e raio r :*

- se $d < r$, a reta é **secante** (2 interseções);
- se $d = r$, a reta é **tangente** (1 interseção);
- se $d > r$, a reta é **externa** (0 interseções).

Exemplo

Decida a posição relativa da reta $3x + 4y - 10 = 0$ em relação à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Solução O centro é $C(1, 2)$ e $r = 3$. A distância do centro à reta é

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|1|}{5} = \frac{1}{5}.$$

Como $d < r$, a reta é **secante**.

35.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Escreva a equação da circunferência de centro $C(-1, 4)$ e raio 2.
2. Encontre o centro e o raio de $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$.
3. Verifique se o ponto $P(1, 2)$ pertence à circunferência $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$.
4. Determine os pontos de interseção entre $y = 0$ e $x^2 + y^2 = 16$.

Aplicação

5. Encontre a equação da circunferência de diâmetro com extremidades $A(2, 0)$ e $B(6, 4)$.
6. Determine as interseções entre a reta $y = 2x - 1$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 5$.
7. Para quais valores de k a reta $y = k$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 9$?
8. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(0, 4)$.

Domínio

9. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $PA = 5$, com $A(2, -1)$.
10. Seja $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$. Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $PA = PB$.
11. Encontre m para que a reta $y = mx + 3$ seja tangente à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Coroação

12. Seja $\gamma : x^2 + y^2 = 1$. Para um ponto $P(t, 0)$ com $t > 1$, considere as tangentes a γ que passam por P . Determine as equações dessas tangentes.
13. Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que a potência de P em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 4x = 0$ seja igual a 3.

35.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- a ideia de lugar geométrico e como traduzir condições em equações;
- circunferência como conjunto de pontos a distância constante de um centro;

- equação reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e forma geral $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$;
- completar quadrados para encontrar centro e raio;
- interseção reta-circunferência por sistema;
- (opcional) distância do ponto à reta e critério de tangência.

CAPÍTULO 36

Exercícios de Geometria Espacial e Analítica

Este capítulo aproxima duas maneiras de enxergar a geometria. Nos sólidos, um bom esboço ajuda a separar raio, altura, geratriz e área da base. No plano cartesiano, o desenho orienta a equação, mas é a álgebra que confirma a posição de cada ponto, reta ou circunferência.

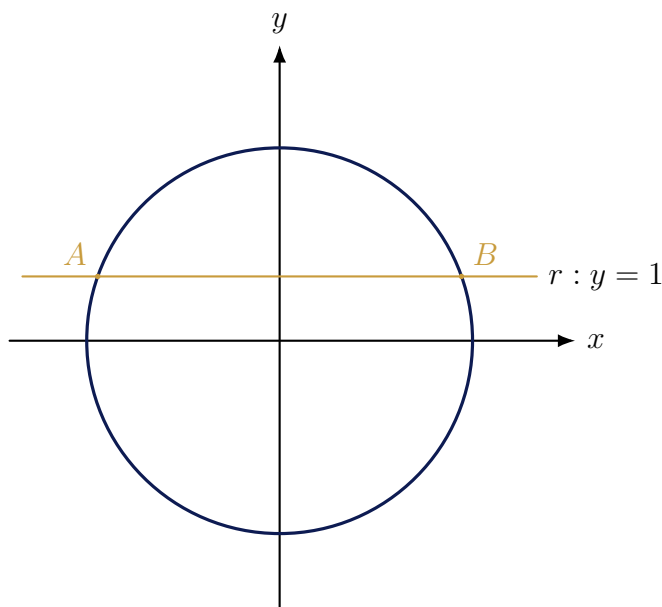
36.1 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule a distância entre $A(-2, 1)$ e $B(4, 5)$.
2. Encontre o ponto médio do segmento com extremidades $A(7, -3)$ e $B(-1, 9)$.
3. Determine a equação da reta que passa por $(3, 2)$ e tem coeficiente angular $m = -2$.
4. Escreva a equação da circunferência de centro $C(1, -2)$ e raio 4.
5. Um cone reto tem raio $r = 3$ e altura $h = 4$. Calcule a geratriz e o volume.
6. Uma esfera tem área 144π . Determine o raio e o volume.
7. Considere os pontos $A(0, 0)$ e $B(6, 8)$. (a) Calcule AB . (b) Encontre o ponto médio M .
8. Encontre o centro e o raio de $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 7 = 0$.
9. Um tronco de cone tem $R = 6$, $r = 2$ e $h = 8$. Calcule o volume.

Aplicação

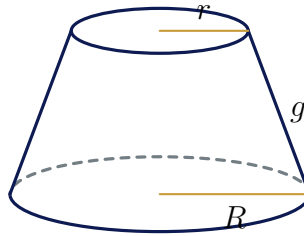
10. Encontre o ponto de interseção das retas $y = \frac{1}{2}x + 1$ e $2x + y = 7$.
11. Determine as interseções entre a reta $y = -x + 4$ e a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.
12. Para quais valores de k a reta $y = k$ corta a circunferência $x^2 + y^2 = 16$ em dois pontos?
13. Encontre a equação da circunferência cujo diâmetro tem extremidades $A(-2, 3)$ e $B(6, 1)$.
14. Uma esfera de raio 5 está inscrita em um cilindro reto. Calcule a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro.
15. Um cilindro e um cone têm o mesmo raio r e a mesma altura h . Qual é a razão $\frac{V_{\text{cone}}}{V_{\text{cil}}}$?
16. No plano, a circunferência tem centro $C(1, 1)$ e passa pelo ponto $P(4, 3)$. Determine sua equação.
17. Determine a equação da reta perpendicular a $y = 3x - 2$ que passa por $(1, 5)$.
18. Na figura, a reta r intercepta a circunferência em A e B . Determine as coordenadas de A e B .



(Considere a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.)

Domínio

19. Mostre que o triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ e $C(3, 4)$ é isósceles.
20. Encontre m para que a reta $y = mx + 2$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.
21. Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $PA = PB$, com $A(-3, 2)$ e $B(5, 2)$.
22. Um cone reto tem área lateral 48π e raio $r = 6$. Determine a geratriz e a altura.
23. Uma esfera é derretida e o material é usado para formar 8 esferas idênticas. Se o raio da esfera original era 6, qual é o raio de cada esfera menor?
24. Um tronco de cone tem $R = 5$, $r = 3$ e geratriz $g = 5$. Determine sua altura h .



25. Determine a distância do ponto $C(2, -1)$ à reta $3x - 4y + 5 = 0$.
26. Determine os pontos de interseção entre as circunferências $x^2 + y^2 = 25$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 16$.

Coroação

27. Seja $\gamma : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ e $r : y = mx$. Determine os valores de m para os quais r é tangente a γ .
28. Determine a equação da circunferência que é tangente aos eixos coordenados e passa pelo ponto $(3, 4)$.
29. Um plano corta uma esfera de raio R a uma distância d do centro. Mostre que a seção é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - d^2}$ e determine sua área.
30. Um cone reto de altura h e raio da base r é cortado por um plano paralelo à base, formando um tronco de cone de altura αh (com $0 < \alpha < 1$). Determine o volume do tronco em função de r , h e α .
31. Considere a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e um ponto $P(t, 0)$ com $t > 1$. Determine as equações das tangentes à circunferência que passam por P .

PARTE VIII • REPRESENTAÇÃO E MODELAGEM

CAPÍTULO 37

Estatística Descritiva

Motivação 37.1

Quando a gente tem **muitos dados**, olhar valor por valor não ajuda. A Estatística Descritiva cria **medidas** (média, mediana, moda, variância, desvio padrão) e **representações gráficas** para resumir o conjunto e tomar decisões com mais clareza.

Contexto histórico 37.1

A ideia de resumir dados aparece desde censos antigos, mas a estatística moderna cresceu junto com a ciência e a administração pública. No Ensino Médio, o foco é interpretar dados, calcular medidas básicas e ler gráficos com senso crítico.

37.1 Dados, tabelas e frequências

Considere um conjunto de dados (amostra) com n observações. Uma **tabela de frequências** organiza os valores e quantas vezes aparecem.

Definição 37.1: Frequência absoluta e relativa

A **frequência absoluta** de um valor é o número de vezes que ele aparece. A **frequência relativa** é a frequência absoluta dividida por n .

Exemplo

Os dados (notas) são: 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9. Monte a tabela de frequências.

Solução

Valor	f	fr
6	1	$\frac{1}{7}$
7	2	$\frac{2}{7}$
8	3	$\frac{3}{7}$
9	1	$\frac{1}{7}$

37.2 Medidas de tendência central

37.2.1 Média

Proposição 37.1 (Média aritmética). *Para dados $x_1, \dots, x_n$, a média é*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Exemplo

Calcule a média de 4, 5, 7, 8.

Solução

$$\bar{x} = \frac{4 + 5 + 7 + 8}{4} = 6.$$

37.2.2 Média ponderada

Quando os valores têm pesos diferentes, a média simples deixa de representar corretamente o conjunto. Se $x_1, \dots, x_k$ possuem pesos $p_1, \dots, p_k$, usamos

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 p_1 + \dots + x_k p_k}{p_1 + \dots + p_k}.$$

Uma prova de nota 8 com peso 2 e outra de nota 6 com peso 3 produzem

$$\bar{x}_p = \frac{8 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{34}{5} = 6,8.$$

37.2.3 Mediana

Proposição 37.2 (Mediana). *Ordene os dados.*

- Se n é ímpar, a mediana é o termo central.
- Se n é par, a mediana é a média dos dois termos centrais.

Exemplo

Encontre a mediana de 2, 3, 4, 8, 9, 10.

Solução Como $n = 6$, a mediana é

$$\text{Med} = \frac{4 + 8}{2} = 6.$$

37.2.4 Quartis e boxplot

Depois de ordenar os dados, os **quartis** dividem a lista em quatro partes. O segundo quartil Q_2 é a mediana; Q_1 é a mediana da metade inferior e Q_3 , da metade superior. O intervalo

$$AIQ = Q_3 - Q_1$$

é chamado **amplitude interquartil** e descreve a dispersão da metade central dos dados.

Para 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, temos

$$Q_1 = 2, \text{quad} Q_2 = 4, \text{quad} Q_3 = 9.$$

Um **boxplot** representa os extremos, os quartis e a mediana em uma única figura.

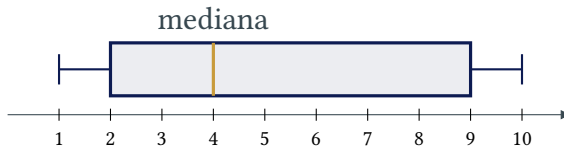


Figura 37.1: Boxplot dos dados 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10.

37.2.5 Moda**Definição 37.2: Moda**

A **moda** é o valor (ou valores) que mais se repete(m).

Exemplo

Qual a moda dos dados 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5?

Solução A moda é 3.

37.3 Medidas de dispersão

37.3.1 Variância

Proposição 37.3 (Variância (dados não agrupados)). *Para dados $x_1, \dots, x_n$ e média $\bar{x}$, definimos a variância por*

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Observação. Em alguns cursos (e em muitas calculadoras), para **amostra** usa-se

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

No Ensino Médio, quando o enunciado não especificar, use a definição com n .

37.3.2 Desvio padrão

Definição 37.3: Desvio padrão

O **desvio padrão** é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Exemplo

Para os dados 2, 4, 4, 6, calcule $\bar{x}$, σ^2 e σ .

Solução

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 6}{4} = 4.$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(2 - 4)^2 + (4 - 4)^2 + (4 - 4)^2 + (6 - 4)^2}{4} \\ &= \frac{4 + 0 + 0 + 4}{4} = 2, \quad \sigma = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

37.3.3 Coeficiente de variação

O desvio padrão mantém a unidade dos dados. Para comparar dispersões de conjuntos com médias muito diferentes, pode ser mais informativo usar o **coeficiente de variação**:

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} \cdot 100\%, \quad \bar{x} \neq 0.$$

Se duas turmas têm desvios padrão iguais, mas médias 5 e 50, a mesma dispersão absoluta representa situações relativas muito diferentes. O coeficiente de variação torna essa comparação explícita.

37.4 Leitura e interpretação de gráficos

Gráficos não servem só para “enfeitar”: eles ajudam a perceber padrões, comparar grupos e identificar valores atípicos.

37.4.1 Gráfico de barras (comparação de categorias)

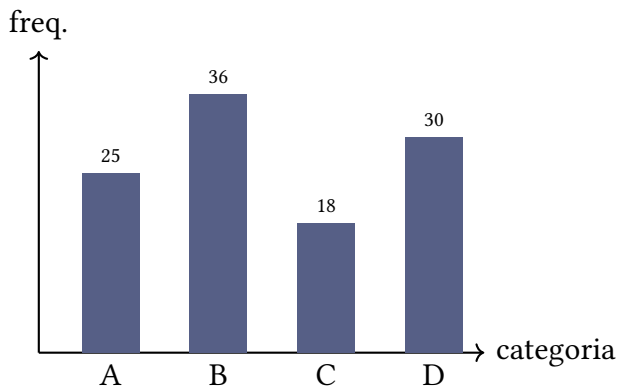


Figura 37.2: Exemplo de gráfico de barras: comparar categorias (A, B, C, D).

37.4.2 Histograma (dados em intervalos)

Quando os dados são muitos, é comum agrupá-los em **classes** (intervalos). O histograma mostra a frequência em cada intervalo.

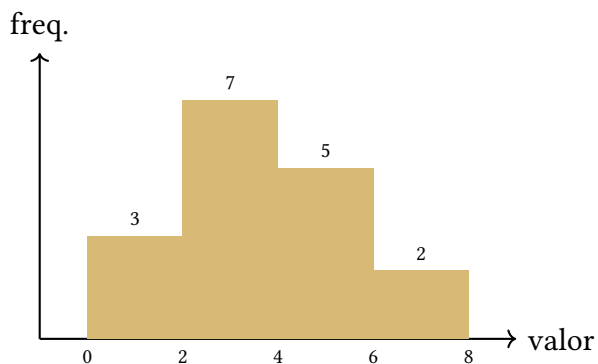


Figura 37.3: Exemplo de histograma: frequências por intervalos.

37.4.3 Cuidados na leitura

- Verifique se o eixo vertical começa em zero (senão, pode exagerar diferenças).
- Observe a unidade (porcentagem, pessoas, reais, etc.).
- Veja se há comparação justa (mesma escala, mesmo período, mesma base).

37.5 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Calcule a média de 5, 7, 8, 10.
2. Encontre a mediana de 1, 4, 4, 6, 9.
3. Encontre a moda dos dados: 2, 2, 3, 4, 4, 4, 7.
4. Para os dados 1, 3, 5, 7, calcule $\bar{x}$ e σ^2 (usando n).

Aplicação

5. A tabela mostra o número de livros lidos por 10 alunos:

0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5.

Determine média, mediana e moda.

6. As alturas (em cm) de 5 estudantes são 160, 165, 170, 175, 180. Calcule a variância e o desvio padrão.
7. Em uma prova, a média foi 6,0. Um aluno tirou 2,0 pontos abaixo da média. Qual foi a nota dele?
8. Um conjunto tem média 10. Ao adicionar o valor 20, a nova média passa a 11. Quantos dados havia originalmente?

Domínio

9. Dois conjuntos têm a mesma média, mas um tem desvio padrão maior. O que isso significa, em termos de dispersão?
10. Considere os dados 1, 1, 1, 9, 9, 9. Calcule média e mediana e comente qual medida descreve melhor o “centro”.
11. (Leitura gráfica) No histograma da seção anterior, qual intervalo tem maior frequência?
12. (Leitura gráfica) No gráfico de barras, qual categoria é a maior? Qual é a menor?

Coroação

13. (Nível superior) Prove que, para quaisquer dados $x_1, \dots, x_n$,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

14. (Nível superior) Um conjunto tem média 8 e variância 4 (definição com n). Se somarmos 3 a todos os valores, qual será a nova média e a nova variância?

37.6 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- tabelas de frequência (absoluta e relativa);
- média simples e ponderada, mediana e moda;

37. ESTATÍSTICA DESCRITIVA

- quartis, boxplot e amplitude interquartil;
- variância, desvio padrão e coeficiente de variação;
- leitura de gráficos (barras e histograma) e cuidados de interpretação.

CAPÍTULO 38

Unidades e Notação Científica

Motivação 38.1

Em ciência, tecnologia e também em questões de vestibular, é comum trabalhar com quantidades **muito grandes** (distâncias astronômicas) ou **muito pequenas** (tamanho de células). Para isso, usamos o **sistema métrico**, a **notação científica** e noções de **ordem de grandeza**. Além disso, para comunicar medidas com responsabilidade, precisamos dominar **algarismos significativos**.

Contexto histórico 38.1

O sistema métrico surgiu na França no fim do século XVIII para padronizar medidas. Hoje ele evoluiu para o **SI (Sistema Internacional de Unidades)**, base de praticamente toda medição científica. A notação científica popularizou-se com a escrita de potências de 10 e o uso de prefixos como **kilo**, **mili** e **micro**.

38.1 Sistema métrico e prefixos

No SI, muitas unidades são construídas a partir de potências de 10. Alguns prefixos importantes:

Prefixo	símbolo	fator
quilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
(unidade)	–	10^0
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

O SI organiza sete grandezas de base. Neste livro, as mais presentes são comprimento, massa, tempo e temperatura:

Grandeza	unidade	símbolo
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
temperatura	kelvin	K

Unidades como velocidade, área e volume são **derivadas**: surgem de combinações das unidades de base, como m/s, m² e m³.

Exemplo

Converta 3,5 km para metros.

Solução Como $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$,

$$3,5 \text{ km} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 3500 \text{ m}.$$

38.2 Conversões no sistema métrico

38.2.1 Comprimento, área e volume

- Comprimento: o fator muda por potências de 10.
- Área: ao converter, o fator é elevado ao quadrado.
- Volume: ao converter, o fator é elevado ao cubo.

Exemplo (área)

Converta 2 m^2 para cm^2 .

Solução Como $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$,

$$1 \text{ m}^2 = (100 \text{ cm})^2 = 10^4 \text{ cm}^2.$$

Logo,

$$2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2.$$

38.2.2 Litro e metro cúbico

Proposição 38.1 (Relação entre litro e metro cúbico).

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Exemplo

Converta 750 mL para litros e para m^3 .

Solução

$$750 \text{ mL} = 0,750 \text{ L} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

38.2.3 Massa, tempo e temperatura

Algumas conversões importantes não seguem apenas a sequência centi–mili–quilo:

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}, \quad 1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}.$$

Para temperatura, a diferença entre as escalas Celsius e kelvin é uma translação:

$$T_K = T_{\text{C}} + 273,15.$$

Assim, 25°C correspondem a $298,15 \text{ K}$. Em diferenças de temperatura, uma variação de 1°C tem o mesmo tamanho que uma variação de 1 K .

38.3 Análise dimensional

As unidades também participam do raciocínio. Uma igualdade só pode comparar grandezas de mesma dimensão. Se uma distância é dividida por um tempo, a unidade resultante deve ser de velocidade; somar metros com segundos não produz uma grandeza coerente.

Por exemplo, um carro percorre 150 km em 2,5 h. Mantendo as unidades na conta,

$$v = \frac{150 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 60 \text{ km/h.}$$

Se quisermos o resultado em metros por segundo,

$$60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \frac{50}{3} \text{ m/s.}$$

As unidades canceladas mostram por que o fator de conversão está na posição correta.

38.4 Ordem de grandeza

Definição 38.1: Ordem de grandeza

A **ordem de grandeza** de um número é a potência de 10 que melhor representa seu tamanho. Em geral, escrevemos o número em notação científica $a \cdot 10^n$ (com $1 \leq a < 10$) e olhamos para 10^n .

Regra prática

Se $a \cdot 10^n$ está na notação científica:

- se $1 \leq a < \sqrt{10} \approx 3,16$, a ordem de grandeza é 10^n ;
- se $\sqrt{10} \leq a < 10$, a ordem de grandeza é 10^{n+1} .

Exemplo

Determine a ordem de grandeza de $7,2 \times 10^4$.

Solução Como $7,2 \geq 3,16$, a ordem de grandeza é 10^5 .

38.5 Notação científica

Definição 38.2: Notação científica

Um número está em **notação científica** quando é escrito como

$$a \cdot 10^n,$$

onde $1 \leq a < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$.

38.5.1 Operações com notação científica

- Multiplicação: $(a \cdot 10^m)(b \cdot 10^n) = (ab) \cdot 10^{m+n}$.
- Divisão: $\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}$.

Exemplo

Calcule $(3,0 \times 10^5) \cdot (2,0 \times 10^{-3})$ em notação científica.

Solução

$$(3,0 \cdot 2,0) \times 10^{5+(-3)} = 6,0 \times 10^2.$$

38.6 Algarismos significativos

Ao medir, não existe “precisão infinita”: toda medida tem incerteza. Os **algarismos significativos** indicam quais dígitos são confiáveis.

38.6.1 Regras básicas

- Todo dígito diferente de zero é significativo.
- Zeros entre dígitos não nulos são significativos.
- Zeros à esquerda (antes do primeiro dígito não nulo) **não** são significativos.
- Zeros à direita podem ou não ser significativos (depende de haver vírgula/indicação). Em notação científica, isso fica claro.

Exemplos

- 0,00450 tem 3 algarismos significativos (4, 5 e o zero final).
- 1200 é ambíguo; já $1,20 \times 10^3$ tem 3 algarismos significativos.

38.6.2 Arredondamento

- Para manter k algarismos significativos, olhe para o $(k + 1)$ -ésimo dígito.
- Se for 0–4, mantém; se for 5–9, aumenta 1 no k -ésimo.

Em multiplicações e divisões, o resultado costuma conservar a quantidade de algarismos significativos do dado menos preciso. Em adições e subtrações, observamos a última casa decimal confiável. Essas regras não substituem a análise do contexto, mas impedem que o resultado aparente uma precisão que as medidas originais não possuíam.

38.7 Exercícios Propostos**Fundamentos**

1. Converta: (a) 4,2 km em metros; (b) 35 cm em milímetros.
2. Converta $0,08 \text{ m}^2$ para cm^2 .
3. Escreva em notação científica: (a) 0,00039; (b) 7 800 000.
4. Calcule em notação científica: $(5 \times 10^3) \cdot (2 \times 10^{-5})$.
5. Determine a ordem de grandeza de $2,9 \times 10^6$.

Aplicação

6. Converta 2,5 L para m^3 .
7. Uma folha tem área $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. Estime a área em m^2 em notação científica.
8. Um fio tem diâmetro 0,00032 m. Escreva em micrômetros (μm).
9. Um valor foi medido como $3,40 \times 10^2$. Quantos algarismos significativos essa medida tem?

Domínio

10. Compare as ordens de grandeza: (a) $9,9 \times 10^{-2}$; (b) $1,1 \times 10^{-1}$.
11. Em uma experiência, mede-se $L = 12,30$ cm e $W = 3,2$ cm. Estime a área $A = L \cdot W$ com algarismos significativos apropriados.
12. Mostre que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$.

Coroação

13. Mostre que $\log_{10}(N)$ indica quantos dígitos tem N (em base 10), até um ajuste. Use isso para estimar o número de dígitos de 2^{100} .
14. Uma medida é dada como 0,0300. Explique por que essa escrita contém mais informação do que 0,03.

38.8 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- sistema métrico e prefixos;
- unidades de base e derivadas;
- conversões de comprimento, área, volume, massa, tempo e temperatura;
- análise dimensional e cancelamento de unidades;
- notação científica e operações;
- ordem de grandeza;
- algarismos significativos e arredondamento.

CAPÍTULO 39

Exercícios de Estatística Descritiva e Notação Científica

Os exercícios seguintes alternam leitura de dados e controle de grandezas. Em estatística, organize os valores antes de resumi-los; em conversões, mantenha a unidade visível; em notação científica, cuide para que o coeficiente permaneça entre 1 e 10. Essas pequenas escolhas deixam a solução mais segura e mais fácil de revisar.

39.1 Exercícios Propostos

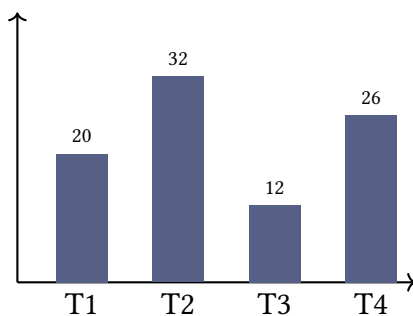
Fundamentos

1. Calcule a média de 2, 4, 6, 8, 10.
2. Encontre a mediana dos dados 3, 7, 8, 8, 9.
3. Encontre a moda dos dados 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4.
4. Para os dados 1, 3, 5, 7, calcule $\bar{x}$ e σ^2 usando a definição com n .
5. Converta: (a) 4,8 km em metros; (b) 250 mm em centímetros.
6. Converta $0,12 \text{ m}^2$ para cm^2 .
7. Escreva em notação científica: (a) 0,000072; (b) 9 500 000.
8. Determine a ordem de grandeza de $3,1 \times 10^{-7}$.
9. Quantos algarismos significativos tem: (a) 0,00340; (b) $2,00 \times 10^5$?

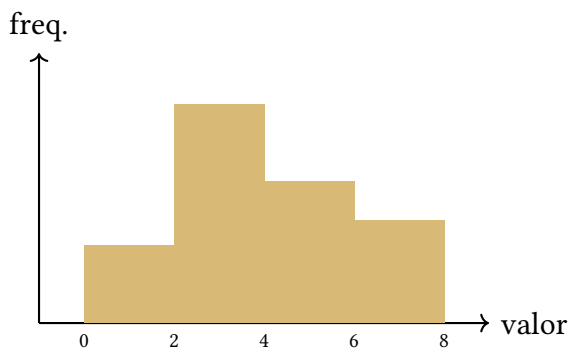
Aplicação

10. As idades (em anos) em um grupo são: 12, 13, 13, 14, 14, 14, 16. Determine média, mediana e moda.
11. Em uma turma, as notas foram: 4, 5, 5, 6, 6, 7, 9. Calcule o desvio padrão (definição com n).
12. Um laboratório mediu uma massa como 0,00560 kg. Escreva em gramas e em notação científica.
13. Calcule e escreva em notação científica:

$$(6,0 \times 10^4) \cdot (3,0 \times 10^{-2}).$$
14. (Leitura gráfica) O gráfico de barras representa o número de acertos em quatro turmas. Qual turma teve o maior valor? E a menor?



15. (Leitura gráfica) O histograma a seguir representa frequências por intervalos. Qual intervalo tem maior frequência?



16. Um conjunto tem média 12. Ao adicionar dois valores, 8 e 20, a nova média passa a 12,5. Quantos dados havia originalmente?

Domínio

17. Dois conjuntos têm a mesma média. Um deles tem desvio padrão maior. Explique o que isso significa.
18. Considere os dados 1, 1, 1, 1, 9. Calcule média e mediana e comente qual descreve melhor o centro.
19. Uma medida foi registrada como 1200 m. Dê duas escritas em notação científica que indiquem (a) 2 algarismos significativos e (b) 4 algarismos significativos.
20. Um reservatório tem volume $2,5 \text{ m}^3$. Converta para litros e escreva o resultado em notação científica.
21. Calcule a variância (definição com n) dos dados 0, 0, 0, 2, 2.

Coroação

22. Mostre que, se somarmos uma constante c a todos os valores, então a média aumenta em c . O que acontece com a variância?
23. Para dados $x_1, \dots, x_n$ com $\sigma > 0$, defina $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$. Mostre que a média dos y_i é 0 e a variância é 1 (usando a definição com n).
24. Estime a ordem de grandeza de $\frac{(7,6 \times 10^6)(3,2 \times 10^{-4})}{9,5 \times 10^2}$.

39.2 Resumo do Capítulo

Neste capítulo de exercícios revisamos:

- medidas de tendência central e dispersão (média, mediana, moda, variância, desvio padrão);
- leitura de gráficos (barras e histograma);
- sistema métrico, conversões, notação científica, ordem de grandeza;
- algarismos significativos.

PARTE IX • APÊNDICE DE MATURIDADE MATEMÁTICA

CAPÍTULO 40

Apêndice de Maturidade Matemática

Motivação 40.1

Há problemas em que a conta é curta, mas o começo custa a aparecer. Neles, a dificuldade está em separar os dados, perceber a estrutura e escolher uma representação que torne a ideia visível. Este apêndice trata desses hábitos de leitura e investigação.

Contexto histórico 40.1

George Pólya organizou muitas dessas ideias em perguntas simples: o que é desconhecido, quais são os dados, que problema parecido já foi resolvido e como conferir o resultado. Não se trata de uma receita infalível, mas de cultivar movimentos que devolvem direção ao raciocínio [13].

40.1 Quando o começo ainda não apareceu

Antes de procurar uma fórmula, vale tornar o problema mais nítido. Os movimentos abaixo não precisam ocorrer sempre na mesma ordem; cada questão pede uma combinação diferente deles.

1. **Leitura ativa.** Leia o enunciado e grife: dados, pergunta, restrições e unidades.
2. **Reescreva com suas palavras.** Se você não consegue reexplicar, ainda não entendeu.
3. **Traduza para matemática.** Defina variáveis, faça desenho/tabela e escreva relações.

4. **Escolha uma ferramenta.** Equações? Geometria? Contagem? Função? Estatística?
5. **Desenvolva a ideia.** Registre as passagens importantes sem esconder hipóteses.
6. **Volte ao enunciado.** Confira domínio, sinal, unidade e se a conclusão responde ao que foi perguntado.

40.2 Interpretação de problemas

40.2.1 Pergunta, dados e restrições

- **O que o problema pede?** (valor numérico, equação, intervalo, comparação, justificativa)
- **Quais são os dados?** (números, condições, palavras-chave)
- **Quais são as restrições?** (inteiro, positivo, medida, intervalo, “sem reposição”, etc.)

40.2.2 Palavras que viram matemática

Expressão no enunciado	Tradução típica
"ao menos" / "no mínimo"	$\geq$
"no máximo"	$\leq$
"exatamente"	$=$
"proporcional"	razão constante
"aumenta em $p\%$ "	multiplica por $1 + \frac{p}{100}$
"diminui em $p\%$ "	multiplica por $1 - \frac{p}{100}$

40.3 Heurísticas (quando você trava)

1. **Faça um desenho.** Mesmo em problemas algébricos, um esboço ajuda.
2. **Teste casos simples.** Pegue valores pequenos para entender o comportamento.
3. **Procure padrão.** Liste os primeiros casos e tente generalizar.
4. **Trabalhe de trás para frente.** Útil quando a condição final é clara.

5. **Invente uma variável.** “Seja $x...$ ” muitas vezes destrava.
6. **Troque a representação.** Fração $\leftrightarrow$ decimal, tabela $\leftrightarrow$ gráfico, geometria $\leftrightarrow$ coordenadas.
7. **Cheque limites.** O resultado faz sentido se o dado crescer muito? E se for zero?

40.4 Erros comuns (e como evitar)

- **Trocar o que é pedido.** Solução: escreva a pergunta em uma linha separada.
- **Perder domínio/restrição.** Solução: anote ao lado (ex.: $x > 0, n \in \mathbb{N}$).
- **Erro de sinal / conta longa.** Solução: reduza passos e use parênteses.
- **Unidade incoerente.** Solução: escreva unidade em cada etapa (cm, m, L, etc.).
- **Arredondar cedo demais.** Solução: deixe o arredondamento para o final.
- **Confundir média com mediana.** Solução: lembre: média “puxa” por valores extremos.

40.5 Gestão de tempo em prova

1. **Varredura inicial (2–5 min).** Identifique questões fáceis e marque.
2. **Primeira passada.** Resolva as fáceis e as médias rápidas.
3. **Segunda passada.** Ataque as médias demoradas.
4. **Última passada.** Tente as difíceis (coroação).
5. **Regra de corte.** Se ficou 4–6 min parado, mude de questão e volte depois.

40.6 Reconhecendo a natureza do problema

40.6.1 Misturas, médias e porcentagens

- Organize em tabela: quantidade, valor, total.
- Use soma dos totais e divida pela soma das quantidades.

40.6.2 Problemas de contagem

- Pergunte: ordem importa?
- Há repetição?
- Dá para quebrar em casos e somar?

40.6.3 Problemas geométricos

- Faça figura e marque o que é igual/paralelo/perpendicular.
- Procure triângulos semelhantes, Pitágoras, áreas e simetria.

40.6.4 Problemas com funções

- Identifique variável e unidade.
- Ache zeros/interceptos, crescimento/decrescimento e pontos notáveis.

40.7 Exercícios rápidos (treino de maturidade)

Fundamentos

1. Um enunciado diz: "no máximo 12". Escreva isso usando desigualdade.
2. Em um problema, aparece: "aumentou 15%". Escreva o fator multiplicativo.
3. Você fez uma conta e obteve $x = -3$ para uma medida de comprimento. O que deve ser checado antes de aceitar a resposta?

Aplicação

4. Um carro percorre 180 km em 3 h. O problema pede a velocidade média. Qual é a grandeza e qual é a unidade?
5. Você precisa provar uma afirmação para todo $n \in \mathbb{N}$. Que técnica costuma ser natural para esse tipo de tarefa?
6. Uma prova tem 30 questões e 3 horas. Qual é o tempo médio por questão? Como você usaria isso para planejar a primeira passada?

Domínio

7. Dê um exemplo de situação em que arredondar no meio do cálculo muda a resposta final.
8. Em um problema de contagem, descreva quais perguntas você faz para decidir entre arranjo, combinação e permutação.

Coroação

9. Escreva um plano de ataque (sem resolver) para um problema que mistura: conversão de unidades, notação científica e leitura de gráfico.

40.8 Resumo do Apêndice

Neste apêndice reunimos:

- maneiras de começar uma investigação;
- cuidados de leitura e interpretação;
- mudanças de representação e testes de casos;
- erros comuns e como evitá-los;
- gestão de tempo;
- sinais que ajudam a reconhecer a natureza de um problema.

CAPÍTULO 41

Técnicas Clássicas

Motivação 41.1

Alguns problemas parecem difíceis até você enxergar **o truque certo**. Neste capítulo, vamos reunir técnicas clássicas que aparecem o tempo todo: substituição inteligente, simetria, estimativa, casos extremos e invariantes básicos. A meta não é decorar, mas reconhecer **sinais** de quando cada técnica é útil.

Contexto histórico 41.1

Essas técnicas são muito usadas em olimpíadas e em livros de resolução de problemas. A boa notícia: elas também ajudam em questões de vestibular, porque reduzem conta e aumentam clareza.

41.1 Substituição inteligente

A ideia é trocar uma expressão complicada por uma variável, ou reescrever o problema em termos de uma quantidade mais simples.

Exemplo

Simplifique a expressão

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Solução

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Exemplo

Se $x + \frac{1}{x} = 3$ e $x \neq 0$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Solução Elevando ao quadrado:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

41.2 Simetria

Simetria aparece quando o enunciado trata objetos de forma "igual". Muitas vezes, trocar x por y não muda a expressão; isso sugere reescrever em termos de $x + y$ e xy , ou usar média/igualdade.

Exemplo

Para $a, b > 0$ com $a + b = 10$, determine o valor mínimo de $a^2 + b^2$.

Solução Como

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Mas também

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 100 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100 - 2ab.$$

Para minimizar $a^2 + b^2$, precisamos maximizar ab , o que acontece em $a = b = 5$. Logo, o mínimo é

$$5^2 + 5^2 = 50.$$

41.3 Estimativa

Estimativa é obter um valor aproximado (ou um limite) sem calcular tudo exatamente. Ela é útil para:

- checar se um resultado faz sentido;
- comparar alternativas (múltipla escolha);
- trabalhar com ordens de grandeza.

Exemplo

Sem calcular exatamente, estime $\sqrt{50}$.

Solução Como $49 < 50 < 64$, então

$$7 < \sqrt{50} < 8.$$

41.4 Casos extremos

A técnica consiste em olhar os "limites" do problema: valores muito pequenos, muito grandes, ou configurações extremas. Isso ajuda a:

- derrubar uma afirmação falsa;
- descobrir qual variável controla o comportamento;
- encontrar o caso que maximiza/minimiza.

Exemplo

Em um triângulo, é verdade que o maior lado é sempre menor que a soma dos outros dois. Explique por que isso é inevitável olhando um caso extremo.

Solução Se tentarmos fazer um lado tão grande quanto a soma dos outros dois, os três pontos ficam "quase alinhados". No limite, vira um segmento, e não existe triângulo. Por isso a desigualdade do triângulo deve ser estrita.

41.5 Invariantes básicos

Um **invariante** é uma quantidade que **não muda** quando aplicamos uma operação do problema. Para encontrar invariantes, pergunte:

- o que permanece igual após cada passo?
- alguma paridade (par/ímpar) se conserva?
- alguma soma ou resto módulo m se mantém?

Exemplo

Um número inteiro começa em 1 e, a cada passo, você pode somar 2 ou somar 4. É possível chegar ao número 2?

Solução Somar 2 ou 4 não muda a paridade: começando em 1 (ímpar), sempre permanece ímpar. Como 2 é par, é impossível.

41.6 Exercícios Propostos

Fundamentos

1. Simplifique $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$, com $x \neq 3$.
2. Se $x + \frac{1}{x} = 5$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
3. Sem usar calculadora, mostre que $9 < \sqrt{95} < 10$.
4. Verifique a paridade de 3^{202} (par ou ímpar).

Aplicação

5. Para $a, b > 0$ com $ab = 16$, determine o valor mínimo de $a + b$.
6. (Estimativa) Sem calcular exatamente, compare $\sqrt{199}$ e 14.
7. (Casos extremos) Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro 20, o de maior área é o quadrado.
8. (Invariante) Você começa com o número 0 e, a cada jogada, pode somar 3 ou subtrair 5. É possível chegar exatamente ao número 1?

Domínio

9. Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, calcule $x^2 + y^2$.
10. (Simetria) Para $a, b, c > 0$ com $a + b + c = 9$, encontre o valor mínimo de $a^2 + b^2 + c^2$.
11. (Invariante) Em um tabuleiro, uma peça se move 2 casas para a direita ou 2 casas para cima. Mostre que ela só visita casas com a mesma cor em um tabuleiro quadriculado.

Coroação

12. (Nível superior) Seja n um inteiro. Prove que n^2 deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

13. (Nível superior) Um número real x satisfaz $x + \frac{1}{x} = 4$. Determine o valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

41.7 Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos técnicas clássicas:

- substituição inteligente e reescritas úteis;
- simetria e escolha de representações;
- estimativas e limites simples;
- análise de casos extremos;
- invariantes (paridade e restos módulo m).

CAPÍTULO 42

Exercícios Gerais

Este último conjunto não anuncia de qual capítulo vem cada ideia. Essa mistura é intencional: parte do domínio matemático está em reconhecer a ferramenta antes de usá-la. Registre as tentativas, inclusive as que não funcionarem; muitas vezes é nelas que aparece a diferença entre conhecer uma fórmula e compreender um problema.

42.1 Exercícios Propostos

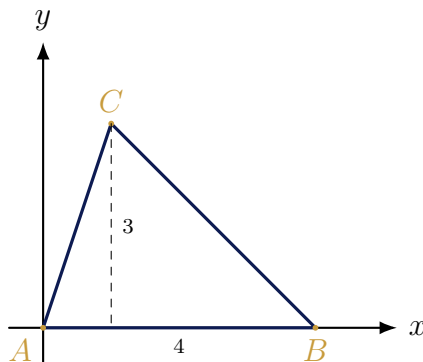
Fundamentos

1. Simplifique: $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.
2. Calcule: $\frac{3}{5} - \frac{7}{10}$.
3. Resolva: $2x - 9 = 5$.
4. Fatore: $x^2 - 10x + 25$.
5. Resolva: $x^2 - 5x = 0$.
6. Determine o domínio real de $f(x) = \sqrt{2x - 1}$.
7. Em uma PA com $a_1 = 2$ e $r = 3$, encontre a_{12} .
8. Em uma PG com $a_1 = 81$ e $q = \frac{1}{3}$, encontre a_5 .
9. Calcule a distância entre $A(1, 2)$ e $B(7, -1)$.
10. Escreva a equação da reta que passa por $(0, 4)$ e tem coeficiente angular $m = -3$.

11. Encontre o centro e o raio de $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.
12. Converta 3,6 km para metros e escreva em notação científica.
13. Para os dados 2, 2, 3, 7, 8, determine a mediana.

Aplicação

14. Uma função afim passa por (2, 1) e (6, 9). Determine sua expressão.
15. Resolva a inequação: $(x - 1)(x + 4) \leq 0$.
16. Um produto de R\$ 200 sofreu desconto de 15% e depois aumento de 10%. Qual é o preço final?
17. Em uma urna com 5 bolas brancas e 3 pretas, retiram-se 2 bolas sem reposição. Qual a probabilidade de as duas serem pretas?
18. Um cilindro tem raio 3 e altura 10. Determine o volume.
19. Uma esfera tem volume 36π . Determine o raio.
20. Determine os pontos de interseção entre a reta $y = x + 1$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 10$.
21. No plano cartesiano, determine a área do triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(1, 3)$.



22. Um conjunto de dados tem média 10. Ao acrescentar um novo valor x , a média passa a 10,5 e agora há 9 dados. Determine x .

Domínio

23. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10. \end{cases}$$

24. Determine m para que a reta $y = mx - 2$ seja tangente à circunferência $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

25. Uma escada encostada numa parede forma um triângulo retângulo com o chão. Se a base está a 6 m da parede e a escada mede 10 m, qual é a altura alcançada?

26. Estime a ordem de grandeza de

$$\frac{(4,8 \times 10^7)(3,0 \times 10^{-5})}{1,6 \times 10^2}.$$

27. Uma sequência é definida por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 3a_n - 1$. Calcule a_2 , a_3 e conjecture uma fórmula para a_n .

28. Um cone e um cilindro têm mesmo raio r e mesma altura h . Determine $\frac{V_{\text{cone}}}{V_{\text{cil}}}$.

29. (Leitura gráfica) Um histograma apresenta as frequências $\{3, 7, 5, 2\}$ para classes consecutivas. Qual classe é modal? O que significa "classe modal"?

Coroação

30. Seja $x > 0$ e $x + \frac{1}{x} = 3$. Determine o valor mínimo de $x + \frac{1}{x}$ e compare com o dado.

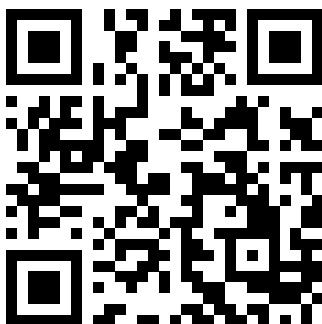
31. Prove que n^2 deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

32. Um problema de contagem: quantos subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 10\}$ têm soma par?

33. No plano, considere o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $PA = PB$, com $A(-2, 1)$ e $B(6, 1)$. Encontre sua equação e interprete geometricamente.

Continue estudando

Você chegou ao final do conteúdo, mas o estudo não termina aqui. O gabarito digital reúne as respostas e as resoluções dos exercícios. Antes de consultá-lo, tente registrar até onde você conseguiu avançar: muitas vezes, é justamente esse trecho que mostra o conceito que precisa ser revisto.



Gabarito gratuito

livro.amexatas.com.br/gabarito

Bibliografia

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à geometria espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- [5] CARMO, Manfredo P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [6] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- [7] EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 6. ed. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1990.
- [8] IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Coleção em 11 volumes. São Paulo: Atual.
- [9] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. 3 volumes. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- [11] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

- [12] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM, 2000.
- [13] PÓLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 2004.
- [14] ROSEN, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 8. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019.
- [15] BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. *The International System of Units (SI Brochure)*. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a construção deste livro.

Em especial, agradeço:

- aos professores e colegas que inspiraram a organização dos conteúdos e a escolha dos exemplos;
- aos leitores que apontaram erros, sugeriram melhorias e incentivaram a continuidade do projeto;
- à minha família e aos amigos, pelo apoio e pela paciência durante o processo de escrita.

Esta primeira edição é resultado desse trabalho coletivo de leitura, estudo e revisão. Que ela ajude outros estudantes a encontrar na matemática a mesma beleza que nos acompanhou durante sua escrita.