

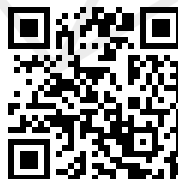
**Pedro Galhardo
Jair de Souza Júnior**

Volume Único

A ARTE DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

GABARITO

Respostas e resoluções dos exercícios



A ARTE DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

GABARITO



Respostas e resoluções dos exercícios

PEDRO GALHARDO
JAIR DE SOUZA JÚNIOR

Este arquivo acompanha gratuitamente o livro. Use
as resoluções depois de tentar cada exercício e volte
à teoria sempre que uma passagem não estiver clara.
livro.amexatas.com.br

SUMÁRIO

Gabarito	1
Capítulo 1	1
Capítulo 2	3
Capítulo 3	8
Capítulo 4	12
Capítulo 5	20
Capítulo 6	26
Capítulo 7	30
Capítulo 8	36
Capítulo 9	40
Capítulo 10	47
Capítulo 11	51
Capítulo 12	56
Capítulo 13	62
Capítulo 14	71
Capítulo 15	79
Capítulo 16	84
Capítulo 17	90
Capítulo 18	106
Capítulo 19	109
Capítulo 20	116
Capítulo 21	118
Capítulo 22	122
Capítulo 23	125
Capítulo 24	132
Capítulo 25	141
Capítulo 26	145
Capítulo 27	149

Capítulo 28.....	153
Capítulo 29.....	159
Capítulo 30.....	164
Capítulo 31.....	168
Capítulo 32.....	177
Capítulo 33.....	182
Capítulo 34.....	188
Capítulo 35.....	193
Capítulo 36.....	199
Capítulo 37.....	208
Capítulo 38.....	214
Capítulo 39.....	219
Capítulo 40.....	226
Capítulo 41.....	228
Capítulo 42.....	230

Gabarito

Capítulo 1

Fundamentos

1. 1. Proposição verdadeira.

 2. Não é proposição, pois é uma ordem.

 3. Não é proposição, pois depende do valor de x .

 4. Proposição verdadeira.

 5. Não é proposição, pois é uma pergunta.
2. 1. Hoje não faz calor.

 2. Existe um número par que não é divisível por 2.

 3. Não existe aluno canhoto na turma.

3. Exemplo:

$$x + 2 = 7.$$

Essa sentença depende do valor atribuído a x . Se $x = 5$, ela é verdadeira; se $x = 1$, ela é falsa. Portanto, não possui valor lógico definido sem especificar a variável.

4. Exemplos:

$$2 + 2 = 4$$

e

$$10 > 3.$$

Ambas são proposições verdadeiras.

Aplicação

5.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. 1. $p \wedge q$ 2. $p \rightarrow q$ 3. $p \vee q$

7. 1. Não vou ao cinema.

2. Vou ao cinema e vou ao teatro.

3. Vou ao cinema ou vou ao teatro.

4. Se vou ao cinema, então vou ao teatro.

5. Vou ao cinema se, e somente se, vou ao teatro.

8.

$$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \boxed{p \wedge \neg q}.$$

Domínio

9.

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + 1 \leq 0}.$$

10. O argumento é inválido.

Nem todo inteiro é múltiplo de 3. A conclusão não decorre das premissas.

11. Sim. Pela Lei de De Morgan:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) = \boxed{p \vee q}.$$

Logo, as proposições são equivalentes.

12.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 10}.$$

Coroação

13. • Se a frase for verdadeira, então o morador é mentiroso, o que torna a frase falsa.
- Se a frase for falsa, então ele não é mentiroso, logo estaria dizendo a verdade.

Isso produz uma contradição lógica.

14.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Como as colunas finais coincidem, concluímos que

$$\boxed{p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q}.$$

Capítulo 2

Fundamentos

1. (a) Verdadeira.
- (b) Falsa.
- (c) Falsa.
2. Os subconjuntos de $\{1, 2\}$ são:

$$\boxed{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}}.$$

3.

$$\boxed{\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } 2 \leq x \leq 8\}}.$$

4. Considerando letras acentuadas como suas versões não acentuadas, temos:

$$D = \{M, A, T, E, I, C\}.$$

Como *o* e *u* não pertencem a *D*, conclui-se que

$$\boxed{C \not\subseteq D}.$$

5. (a) Verdadeira.
(b) Verdadeira.
(c) Verdadeira.

Aplicação

6. (a)

$$A \cup B = \boxed{\{1, 2, 3, 4, 5\}}.$$

- (b)

$$A \cap B = \boxed{\{3\}}.$$

- (c)

$$A - B = \boxed{\{1, 2\}}.$$

- (d)

$$B - A = \boxed{\{4, 5\}}.$$

- 7.

$$|\{a, b, c, d, e\}| = \boxed{5}.$$

8. Como

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e

$$A = \{1, 3, 5\},$$

temos

$$A^c = \boxed{\{2, 4, 6\}}.$$

- 9.

$$A \times B = \boxed{\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}}.$$

10.

$$I = [-1, 2)$$

e

$$J = (0, 3].$$

Logo,

$$I \cap J = \boxed{(0, 2)}$$

e

$$I \cup J = \boxed{[-1, 3]}.$$

Domínio

11. Pela fórmula da união:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Então,

$$|A \cup B| = 15 + 12 - 5 = \boxed{22}.$$

12.

$$A \times B = \boxed{\{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}}.$$

13. Se $A \subseteq B$, então:

$$\boxed{|A| \leq |B|}.$$

14. Exemplo:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4\}.$$

Então,

$$A - B = \{1, 2\}$$

e

$$B - A = \{4\}.$$

Logo,

$$\boxed{A - B \neq B - A}.$$

15. $(\Rightarrow)$ Se $A \subseteq B$, então todo elemento pertencente a A também pertence a B .
Portanto,

$$A \cap B = A.$$

$(\Leftarrow)$ Se

$$A \cap B = A,$$

então todo elemento pertencente a A pertence a B . Logo,

$$A \subseteq B.$$

Concluimos que

$$\boxed{A \subseteq B \iff A \cap B = A}.$$

Coroação

16. Pela fórmula da união:

$$|M \cup F| = 25 + 18 - 10 = 33.$$

Como a turma possui 40 alunos:

$$40 - 33 = \boxed{7}.$$

Portanto, 7 alunos não gostam de nenhuma das duas disciplinas.

17. Pela Lei de De Morgan:

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}.$$

No diagrama de Venn, ambas as regiões representam os elementos que não pertencem nem a A nem a B .

18. Pela Lei de De Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Demonstração:

Se

$$x \in (A \cap B)^c,$$

então

$$x \notin A \cap B.$$

Logo,

$$x \notin A \quad \text{ou} \quad x \notin B.$$

Se

$$x \notin A,$$

então

$$x \in A^c.$$

Se

$$x \notin B,$$

então

$$x \in B^c.$$

Portanto,

$$x \in A^c \cup B^c.$$

Reciprocamente, se $x \in A^c \cup B^c$, então $x \notin A$ ou $x \notin B$. Logo, $x \notin A \cap B$, isto é,

$$x \in (A \cap B)^c.$$

Concluimos que

$$\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}.$$

19. Os subconjuntos de $\{a, b, c\}$ são

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Como o conjunto original possui três elementos,

$$|\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 2^3 = \boxed{8}.$$

20. Pela propriedade distributiva,

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cap \Omega \\ &= \boxed{A}. \end{aligned}$$

21. Pelo princípio da inclusão-exclusão,

$$\begin{aligned} |I \cup E \cup F| &= 60 + 45 + 30 \\ &\quad - 25 - 18 - 15 + 10 \\ &= \boxed{87}. \end{aligned}$$

Assim, o número de estudantes que não estudam nenhum dos três idiomas é

$$100 - 87 = \boxed{13}.$$

22. Os três blocos $\{1, 2\}$, $\{3\}$ e $\{4, 5\}$ são não vazios e dois a dois disjuntos. Além disso,

$$\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Portanto,

$$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\} \text{ é uma partição do conjunto dado.}$$

Capítulo 3

Fundamentos

1. (a) Verdadeira.
- (b) Verdadeira.
- (c) Falsa.
- (d) Verdadeira.
- (e) Falsa.
- (f) Verdadeira.
- (g) Verdadeira.

2.

$$-8 + 5 \cdot (-3) = -8 - 15 = \boxed{-23}.$$

$$12 - (-7) = 12 + 7 = \boxed{19}.$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \boxed{\frac{17}{12}}.$$

$$\left(\frac{5}{6}\right) \div \left(-\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \boxed{-\frac{3}{2}}.$$

3. (a)

$$|9| = \boxed{9}.$$

(b)

$$|-12| = \boxed{12}.$$

(c)

$$|0| = \boxed{0}.$$

(d)

$$\left| -\frac{7}{2} \right| = \boxed{\frac{7}{2}}.$$

4.

$$-6 < -1.$$

Na reta numérica, quanto mais à esquerda um número está, menor ele é.

5. Exemplo:

$$\frac{1}{2}.$$

Temos:

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

e

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

6. Exemplo:

$$\sqrt{2}.$$

Temos:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

e

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Aplicação

7. Exemplos:

$$2,1, \quad 2,5, \quad 2,9.$$

8.

$$|-8| = \boxed{8}.$$

$$|15| = \boxed{15}.$$

$$\left| -\frac{7}{3} \right| = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

$$|\sqrt{5}| = \boxed{\sqrt{5}}.$$

9. A distância entre dois números reais é dada por:

$$|a - b|.$$

Logo,

$$|4 - (-6)| = |10| = \boxed{10}.$$

10.

$$\left| -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right| = |-2| = \boxed{2}.$$

11.

$$|-5| = 5$$

é verdadeira.

$$|3| = -3$$

é falsa.

$$|-7| \geq 0$$

é verdadeira.

Domínio

12. Sabemos que:

$$\sqrt{2} \approx 1,414.$$

Além disso:

$$\frac{3}{2} = 1,5.$$

Logo, a ordem crescente é:

$$\boxed{-1 < 1,4 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}}.$$

13.

$$|x| < 4$$

significa que a distância entre x e 0 é menor que 4. Assim:

$$-4 < x < 4.$$

Os inteiros que satisfazem essa condição são:

$$\boxed{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.$$

14.

$$|-7-2| = |-9| = \boxed{9}.$$

15.

$$r = \frac{7}{50} = \boxed{0,14}.$$

A representação decimal é finita.

16. Seja $n \in \mathbb{Z}$.

Podemos escrever:

$$n = \frac{n}{1}.$$

Como n e 1 são inteiros e $1 \neq 0$, segue da definição de número racional que:

$$n \in \mathbb{Q}.$$

Logo, todo inteiro é racional.

Coroação

17. Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Como $-x \leq 0$, também

$$|-x| = -(-x) = x.$$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Nesse caso, $-x > 0$, de modo que

$$|-x| = -x.$$

Portanto,

$$|x| = |-x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Como os dois lados da desigualdade são não negativos, podemos comparar seus quadrados. Temos

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2,$$

pois $xy \leq |x||y|$. Portanto,

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}.$$

19. Na reta real, a distância entre dois números corresponde ao comprimento do segmento entre eles.

Como:

$$a - b$$

mede a diferença entre as posições de a e b , tomamos o valor absoluto para garantir uma distância não negativa.

Assim:

$$|a - b|$$

representa a distância entre a e b .

20. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ com:

$$a < b.$$

Considere:

$$r = \frac{a + b}{2}.$$

Como a soma e a divisão por 2 preservam a racionalidade:

$$r \in \mathbb{Q}.$$

Além disso:

$$a < r < b.$$

Logo, entre dois números racionais distintos sempre existe um número racional.

Capítulo 4

Fundamentos

1. (a) Verdadeira.

- (b) Verdadeira.

(c) Verdadeira.

(d) Verdadeira.

(e) Verdadeira.

(f) Falsa.

(g) Verdadeira.

(h) Falsa.

(i) Verdadeira.

2. (a)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}}.$$

(b)

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{I}, x > 0}.$$

(c)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}, (x < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{N})}.$$

3. (a)

$$\boxed{[-2, 5]}.$$

(b)

$$\boxed{(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)}.$$

(c)

$$\boxed{(-4, 2]}.$$

4.

$$A \cap B = \boxed{\{3, 4\}}.$$

$$A \cup B = \boxed{\{1, 2, 3, 4, 5\}}.$$

$$A \setminus B = \boxed{\{1, 2\}}.$$

5. (a)

$$|9| = \boxed{9}.$$

(b)

$$|-12| = \boxed{12}.$$

(c)

$$|0| = \boxed{0}.$$

(d)

$$\left| -\frac{7}{2} \right| = \boxed{\frac{7}{2}}.$$

6.

$$\boxed{-6 < -1}.$$

Na reta numérica, -6 está mais à esquerda que -1 .

7. (a) Exemplo:

$$\frac{1}{2}.$$

(b) Exemplo:

$$\sqrt{2}.$$

(c) Exemplo:

$$-4.$$

8.

$$|4 - (-6)| = |10| = \boxed{10}.$$

Aplicação

9.

$$A = [-1, 4), \quad B = (2, 6].$$

Logo,

$$A \cap B = \boxed{(2, 4)}$$

e

$$A \cup B = \boxed{[-1, 6]}.$$

10. Temos:

$$A = (-2, 3)$$

e

$$B = [1, 5].$$

Assim,

$$A \cap B = [1, 3)$$

e

$$A \cup B = (-2, 5].$$

11. Pela fórmula da união:

$$18 + 12 - 5 = 25.$$

Portanto, 25 alunos gostam de pelo menos um dos esportes.

12. O número de pessoas que gostam de pelo menos uma bebida é:

$$35 + 28 - 12 = 51.$$

Logo,

$$60 - 51 = 9.$$

Portanto, 9 pessoas não gostam de nenhum dos dois.

13.

$$|-3 - 5| = |-8| = 8.$$

14. Precisamos resolver:

$$|x| = \frac{5}{2}.$$

Logo,

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2}.$$

15.

$$|-7| = 7$$

é verdadeira.

$$|4| = -4$$

é falsa.

$$|0| = 0$$

é verdadeira.

16. Temos:

$$A = (-\infty, 1]$$

e

$$B = (-2, 4).$$

Logo,

$$A \cap B = \boxed{(-2, 1]}.$$

17. Primeiro:

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

O complementar em relação a U é:

$$(A \cap B)^c = \boxed{\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}.$$

Domínio

18. Sabemos que:

$$\sqrt{2} \approx 1,414.$$

Além disso:

$$\frac{3}{2} = 1,5.$$

Logo:

$$\boxed{-1 < 1,4 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}}.$$

19. Os restos quadráticos módulo 7 são:

$$0, 1, 2, 4.$$

Se

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

a única possibilidade é:

$$a^2 \equiv 0 \pmod{7} \quad \text{e} \quad b^2 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Logo:

$$\boxed{7 \mid a \quad \text{e} \quad 7 \mid b}.$$

20.

$$A = [-2, 4], \quad B = (1, 6).$$

Então:

$$A \cap B = \boxed{(1, 4]},$$

$$A \cup B = \boxed{[-2, 6)},$$

e

$$A \setminus B = \boxed{[-2, 1]}.$$

21. Os intervalos são:

$$\boxed{[-3, 2)}$$

e

$$\boxed{(1, +\infty)}.$$

22. (a) Verdadeira.

(b) Falsa.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa.

23. Temos:

$$b - a = -(a - b).$$

Como o valor absoluto elimina o sinal:

$$|a - b| = |-(a - b)| = \boxed{|b - a|}.$$

Coroação

24. Seja $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Então:

$$x \in A$$

e

$$x \notin B \cup C.$$

Logo:

$$x \notin B \quad \text{e} \quad x \notin C.$$

Assim:

$$x \in A \setminus B$$

e

$$x \in A \setminus C.$$

Portanto:

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Reciprocamente, seja $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Então $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$.

Assim, $x \notin B \cup C$ e, portanto,

$$x \in A \setminus (B \cup C).$$

Concluimos que:

$$\boxed{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}.$$

25. A negação correta é:

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x \notin \mathbb{Z}}.$$

26. Na reta real, a distância entre dois números corresponde ao comprimento do segmento entre eles.

Como:

$$a - b$$

mede a diferença entre as posições de a e b , tomamos o valor absoluto para obter uma distância não negativa.

Assim:

$$|a - b|$$

representa a distância entre a e b .

27. Temos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\} = (-3, 3)$$

e

$$B = [-1, 4].$$

Logo:

$$A \cap B = \boxed{[-1, 3]}$$

e

$$A \cup B = \boxed{(-3, 4]}.$$

28. (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A . Portanto:

$$\boxed{A = B}.$$

- (b) Seja $x \in A \cap (B \cup C)$.

Então:

$$x \in A$$

e

$$x \in B \cup C.$$

Logo:

$$x \in B \quad \text{ou} \quad x \in C.$$

Assim:

$$x \in (A \cap B) \quad \text{ou} \quad x \in (A \cap C).$$

Portanto:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Reciprocamente, se $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Em ambos os casos, $x \in A$ e $x \in B \cup C$; logo,

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

Concluimos que:

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}.$$

(c) Se $x \in A \cup (B \cap C)$, então $x \in A$, ou $x \in B$ e $x \in C$. Em qualquer caso, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$.

Reciprocamente, se $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então x pertence a ambas as uniões. Se $x \notin A$, necessariamente $x \in B$ e $x \in C$; portanto, $x \in A \cup (B \cap C)$. Assim,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Capítulo 5

Fundamentos

1.

$$3 \mid 45$$

é verdadeiro, pois:

$$45 = 3 \cdot 15.$$

$$5 \nmid 72$$

é verdadeiro, pois 72 não é múltiplo de 5.

$$7 \mid 84$$

é verdadeiro, pois:

$$84 = 7 \cdot 12.$$

2. Os divisores positivos de 24 são:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Os divisores positivos de 36 são:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.$$

3. Os cinco primeiros múltiplos positivos de 8 são:

$$8, 16, 24, 32, 40.$$

Os cinco primeiros múltiplos positivos de 15 são:

$$15, 30, 45, 60, 75.$$

4. Temos:

$$3726.$$

- É divisível por 2, pois termina em número par.
- É divisível por 3, pois:

$$3 + 7 + 2 + 6 = 18,$$

e 18 é múltiplo de 3.

- É divisível por 6, pois é divisível por 2 e por 3.
- É divisível por 9, pois:

$$3 + 7 + 2 + 6 = 18,$$

e 18 é múltiplo de 9.

5.

$$49 = 7^2$$

é composto.

$$51 = 3 \cdot 17$$

é composto.

$$97$$

é primo.

Aplicação

6.

$$360 = \boxed{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

$$1001 = \boxed{7 \cdot 11 \cdot 13}.$$

$$2310 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}.$$

7. Fatorando:

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

e

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Logo,

$$\text{mdc}(168, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = \boxed{42}.$$

$$\text{mmc}(168, 210) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{840}.$$

8.

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

e

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11.$$

Assim:

$$\text{mdc}(252, 198) = 2 \cdot 3^2 = \boxed{18}.$$

$$\text{mmc}(252, 198) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{2772}.$$

9. Precisamos calcular:

$$\text{mmc}(12, 18, 30).$$

Fatorando:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Logo:

$$\text{mmc}(12, 18, 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = \boxed{180}.$$

10. Temos:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

O número de divisores positivos é:

$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{24}.$$

11. Os divisores positivos de 72 são:

$$\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}.$$

12. Aplicando o algoritmo de Euclides:

$$1001 = 143 \cdot 7 + 0.$$

Logo:

$$\text{mdc}(1001, 143) = \boxed{143}.$$

Domínio

13. Os números:

$$n, \quad n + 1, \quad n + 2$$

são três inteiros consecutivos.

Entre três inteiros consecutivos:

- um é divisível por 3;
- pelo menos um é par.

Logo:

$$n(n + 1)(n + 2)$$

é divisível por:

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Portanto:

$$\boxed{6 \mid n(n + 1)(n + 2)}.$$

14. Temos:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1).$$

Fatorando:

$$n^3 - n = n(n - 1)(n + 1).$$

Os números:

$$n - 1, \quad n, \quad n + 1$$

são três inteiros consecutivos.

Assim, um deles é múltiplo de 3. Logo:

$$\boxed{3 \mid (n^3 - n)}.$$

15. Dividindo a equação por 6:

$$3x + 5y = 1.$$

Uma solução é:

$$x = 2, \quad y = -1,$$

pois:

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1.$$

Logo:

$$\boxed{18 \cdot 2 + 30 \cdot (-1) = 6}.$$

16. Aplicando o algoritmo de Euclides:

$$45 = 18 \cdot 2 + 9.$$

Logo:

$$9 = 45 - 18 \cdot 2.$$

Assim:

$$\boxed{\text{mdc}(45, 18) = 9 = 45 - 2 \cdot 18}.$$

17. Dividindo por 2:

$$2x + 3y = 9.$$

Uma solução inteira é:

$$x = 3, \quad y = 1,$$

pois:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9.$$

Logo:

$$\boxed{4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18}.$$

Coroação

18. Dividindo a equação por 6:

$$14x + 5y = 1.$$

Tomando:

$$x = -1, \quad y = 3,$$

temos:

$$14(-1) + 5(3) = -14 + 15 = 1.$$

Logo:

$$84(-1) + 30(3) = 6.$$

Portanto, uma solução inteira é:

$$(x, y) = (-1, 3).$$

19. Dividindo por 3:

$$2x + 3y = 10.$$

Uma solução particular é:

$$x = 2, \quad y = 2.$$

A solução geral é:

$$x = 2 + 3k, \quad y = 2 - 2k,$$

com:

$$k \in \mathbb{Z}.$$

20. Temos:

$$\text{mdc}(14, 21) = 7.$$

Para que:

$$14x + 21y = 5$$

tenha solução inteira, é necessário que:

$$7 \mid 5,$$

o que é falso.

Portanto, a equação não possui solução inteira.

21. Precisamos de:

$$\text{mdc}(n, 12) = 4.$$

Como:

$$12 = 2^2 \cdot 3,$$

segue que:

- n deve ser múltiplo de 4;
- n não pode ser múltiplo de 3.

Logo:

$$n = 4k,$$

com:

$$3 \nmid k.$$

22. Se:

$$a \mid b$$

e

$$a \mid c,$$

então existem inteiros:

$$m, n$$

tais que:

$$b = am$$

e

$$c = an.$$

Logo:

$$b + c = a(m + n),$$

portanto:

$$\boxed{a \mid (b + c)}.$$

Além disso:

$$b - c = a(m - n),$$

logo:

$$\boxed{a \mid (b - c)}.$$

23. Se $p \mid a$, a conclusão já está satisfeita. Suponha, então, que $p \nmid a$. Como p é primo, $\text{mdc}(p, a) = 1$. Pela relação de Bézout, existem inteiros u e v tais que

$$up + va = 1.$$

Multiplicando por b , obtemos

$$ubp + vab = b.$$

O primeiro termo do lado esquerdo é múltiplo de p , e o segundo também, pois $p \mid ab$. Logo, $p \mid b$. Portanto,

$$\boxed{p \mid a \quad \text{ou} \quad p \mid b}.$$

Capítulo 6

Fundamentos

1. Na divisão de 25 por 4:

$$25 = 4 \cdot 6 + 1.$$

Logo, o resto é:

$$\boxed{1}.$$

Na divisão de 81 por 7:

$$81 = 7 \cdot 11 + 4.$$

Logo, o resto é:

$$\boxed{4}.$$

Na divisão de 100 por 9:

$$100 = 9 \cdot 11 + 1.$$

Logo, o resto é:

$$\boxed{1}.$$

- 2.

$$\boxed{32 \equiv 2 \pmod{5}}.$$

3. Temos:

$$19 - 4 = 15.$$

Como:

$$5 \mid 15,$$

segue que:

$$\boxed{19 \equiv 4 \pmod{5}}.$$

Portanto, a congruência é verdadeira.

Aplicação

4. Como:

$$x \equiv 3 \pmod{8},$$

temos:

(a)

$$x + 2 \equiv 3 + 2 \equiv \boxed{5} \pmod{8}.$$

(b)

$$2x \equiv 2 \cdot 3 \equiv \boxed{6} \pmod{8}.$$

(c)

$$x^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv \boxed{1} \pmod{8}.$$

5. Precisamos calcular:

$$7 + 20 = 27.$$

Como:

$$27 \equiv 3 \pmod{24},$$

daqui a 20 horas serão:

$$\boxed{3 \text{ horas}}.$$

6. Os últimos algarismos das potências de 2 seguem o ciclo:

$$2, 4, 8, 6.$$

O ciclo possui período 4. Como:

$$15 \equiv 3 \pmod{4},$$

o último algarismo de:

$$2^{15}$$

é o terceiro do ciclo:

$$\boxed{8}.$$

Domínio

7. Sejam:

$$a = 2m$$

e

$$b = 2n,$$

com:

$$m, n \in \mathbb{Z}.$$

Então:

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$

Como:

$$m + n \in \mathbb{Z},$$

segue que:

$$a + b$$

é múltiplo de 2. Logo, a soma de dois números pares é par.

8. Todo número pode ser escrito na forma:

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

Como:

$$10 \equiv 1 \pmod{9},$$

temos:

$$10^k \equiv 1 \pmod{9}$$

para todo:

$$k \geq 0.$$

Logo, o número é congruente à soma de seus algarismos módulo 9.

Assim, se o número é múltiplo de 9, então a soma de seus algarismos também é múltipla de 9.

9. Temos:

$$5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Logo:

$$5^{37} \equiv 2^{37} \pmod{3}.$$

Além disso:

$$2 \equiv -1 \pmod{3}.$$

Então:

$$2^{37} \equiv (-1)^{37} \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Portanto, o resto da divisão de:

$$5^{37}$$

por:

$$3$$

é:

$$\boxed{2}.$$

Coroação

10. Todo inteiro é par ou ímpar.

- Se n é par, então:

$$n = 2k.$$

Logo:

$$n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

- Se n é ímpar, então:

$$n = 2k + 1.$$

Assim:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Portanto:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Concluimos que o quadrado de um inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4. Logo, não existe inteiro:

$$n$$

tal que:

$$n^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Capítulo 7

Fundamentos

1. Frações equivalentes a:

$$\frac{2}{5}$$

podem ser obtidas multiplicando numerador e denominador pelo mesmo número.

Exemplos:

$$\boxed{\frac{4}{10}, \quad \frac{6}{15}, \quad \frac{10}{25}}.$$

- 2.

$$\frac{60}{150} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

$$\frac{84}{126} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$$\frac{144}{180} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

3. (a)

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{21}{36} + \frac{10}{36} = \boxed{\frac{31}{36}}.$$

(b)

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \boxed{\frac{11}{24}}.$$

(c)

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{21}{27} = \frac{1}{14} \cdot \frac{21}{3} = \frac{21}{42} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(d)

$$\frac{5}{9} \div \frac{10}{21} = \frac{5}{9} \cdot \frac{21}{10} = \boxed{\frac{7}{6}}.$$

4. Comparando os produtos cruzados:

$$11 \cdot 10 = 110$$

e

$$15 \cdot 7 = 105.$$

Como:

$$110 > 105,$$

segue que:

$$\boxed{\frac{11}{15} > \frac{7}{10}}.$$

5. O total de alunos é:

$$18 + 12 = 30.$$

(a) A razão meninas:meninos é:

$$18 : 12 = \boxed{3 : 2}.$$

(b) A fração da turma formada por meninas é:

$$\frac{18}{30} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Aplicação

6.

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4}.$$

Multiplicando em cruz:

$$4x = 36.$$

Logo:

$$\boxed{x = 9}.$$

7.

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{y}.$$

Multiplicando em cruz:

$$5y = 140.$$

Assim:

$$\boxed{y = 28}.$$

8. A razão entre óleo e leite é:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{4}.$$

Logo:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5/4} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

Portanto, serão necessárias:

$$\boxed{\frac{8}{3}}$$

xícaras de óleo.

9. Na escala 1 : 20000:

$$1 \text{ cm} \longrightarrow 20000 \text{ cm}.$$

Então:

$$6,4 \cdot 20000 = 128000 \text{ cm}.$$

Convertendo para metros:

$$128000 \text{ cm} = \boxed{1280 \text{ m}}.$$

10. A razão é:

$$\frac{180}{15} = 12.$$

Logo, com 22 litros:

$$22 \cdot 12 = 264.$$

Portanto, o carro percorrerá:

$$\boxed{264 \text{ km}}.$$

11. A produção é diretamente proporcional ao número de dias e de máquinas.

Temos:

$$240 \longrightarrow 5 \text{ dias e } 8 \text{ máquinas.}$$

Então:

$$x = 240 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{8}.$$

Logo:

$$x = 720.$$

Portanto, serão produzidas:

$$\boxed{720}$$

peças.

Domínio

12. A soma das partes da razão é:

$$3 + 5 = 8.$$

Logo:

$$120 \cdot \frac{3}{8} = 45$$

e

$$120 \cdot \frac{5}{8} = 75.$$

As partes são:

$$\boxed{45 \quad \text{e} \quad 75}.$$

13. A soma das partes da razão é:

$$3 + 4 = 7.$$

Então:

$$84 \cdot \frac{3}{7} = 36$$

e

$$84 \cdot \frac{4}{7} = 48.$$

As partes são:

$$\boxed{36 \text{ e } 48}.$$

14. Uma possibilidade é:

$$\boxed{\frac{13}{20}}.$$

De fato:

$$\frac{5}{8} = \frac{75}{120}, \quad \frac{13}{20} = \frac{78}{120}, \quad \frac{2}{3} = \frac{80}{120}.$$

15. A soma das partes da razão é:

$$7 + 3 = 10.$$

Logo:

$$40 \cdot \frac{7}{10} = 28.$$

Portanto, foram aprovados:

$$\boxed{28}$$

alunos.

16. O tempo é inversamente proporcional ao número de bombas.

Logo:

$$4 \cdot 15 = 10 \cdot t.$$

Assim:

$$t = 6.$$

Portanto, 10 bombas abastecerão o reservatório em:

$$\boxed{6 \text{ horas}}.$$

Coroação

17. Se o preço inicial é P , após o aumento de:

$$\frac{1}{5},$$

o novo preço será:

$$P \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{5}P.$$

Aplicando o desconto de:

$$\frac{1}{6},$$

temos:

$$\frac{6}{5}P \left(1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{6}{5}P \cdot \frac{5}{6} = P.$$

Logo, o preço final é igual ao inicial.

18. A soma das partes da razão é:

$$5 + 7 = 12.$$

Então:

$$96 \cdot \frac{5}{12} = 40$$

e

$$96 \cdot \frac{7}{12} = 56.$$

Os números são:

$$\boxed{40 \quad \text{e} \quad 56}.$$

19. A soma das partes da razão é:

$$2 + 3 + 5 = 10.$$

Logo:

$$200 \cdot \frac{2}{10} = 40,$$

$$200 \cdot \frac{3}{10} = 60,$$

$$200 \cdot \frac{5}{10} = 100.$$

Os números são:

$$\boxed{40, \quad 60, \quad 100}.$$

20. Temos:

$$8,5 \text{ cm} \longrightarrow 170 \text{ km}.$$

Convertendo:

$$170 \text{ km} = 17000000 \text{ cm}.$$

Logo:

$$\frac{8,5}{17000000} = \frac{1}{2000000}.$$

Portanto, a escala é:

$$\boxed{1 : 2000000}.$$

Capítulo 8

Fundamentos

1. (a)

$$12\% \text{ de } 400 = 0,12 \cdot 400 = \boxed{48}.$$

(b)

$$35\% \text{ de } 800 = 0,35 \cdot 800 = \boxed{280}.$$

(c)

$$7\% \text{ de } 1500 = 0,07 \cdot 1500 = \boxed{105}.$$

2. Se x é o preço inicial, após aumento de 25% temos:

$$1,25x = 500.$$

Logo:

$$x = \frac{500}{1,25} = 400.$$

Portanto, o preço inicial era:

$$\boxed{400}.$$

3. Se x é o valor inicial, após desconto de 10% temos:

$$0,9x = 270.$$

Logo:

$$x = \frac{270}{0,9} = 300.$$

Portanto, o valor inicial era:

$$\boxed{300}.$$

Aplicação

4. Dois aumentos sucessivos de 10%:

$$1,1 \cdot 1,1 = 1,21.$$

Logo, o aumento total foi de:

$$\boxed{21\%}.$$

5. Dois descontos sucessivos de 20%:

$$0,8 \cdot 0,8 = 0,64.$$

Logo, o desconto total foi de:

$$\boxed{36\%}.$$

6. Nos juros simples:

$$M = C(1 + it).$$

Substituindo:

$$M = 3000(1 + 0,04 \cdot 6).$$

$$M = 3000(1,24) = 3720.$$

Portanto, o montante é:

$$\boxed{3720}.$$

7. Aplicando as variações sucessivas:

$$0,7 \cdot 1,3 = 0,91.$$

Logo, o valor final corresponde a:

$$91\%$$

do valor inicial.

Assim, houve variação total de:

$$\boxed{-9\%}.$$

Domínio

8. Nos juros compostos:

$$M = C(1 + i)^t.$$

Substituindo:

$$M = 4000(1,08)^3.$$

$$M = 4000 \cdot 1,259712.$$

$$M \approx 5038,85.$$

Portanto, o montante é aproximadamente:

$$\boxed{5038,85}.$$

9. O crescimento é composto:

$$P = 80000(1,03)^5.$$

$$P \approx 80000 \cdot 1,159274.$$

$$P \approx 92741,92.$$

Portanto, a população será aproximadamente:

$$\boxed{92742}.$$

10. Aplicando as variações sucessivas:

$$1,3 \cdot 0,9 = 1,17.$$

Logo, o valor final corresponde a:

$$117\%$$

do inicial.

Assim, houve aumento total de:

$$\boxed{17\%}.$$

11. A taxa anual efetiva é:

$$(1,02)^{12} - 1.$$

Calculando:

$$(1,02)^{12} \approx 1,26824.$$

Logo:

$$1,26824 - 1 \approx 0,26824.$$

Portanto, a taxa anual efetiva aproximada é:

$$\boxed{26,8\%}.$$

Coroação

12. Se o custo é C , então o preço de venda é:

$$V = 1,25C.$$

O lucro é:

$$L = V - C = 0,25C.$$

A porcentagem de lucro sobre o preço de venda é:

$$\frac{0,25C}{1,25C} = 0,2.$$

Logo, o lucro corresponde a:

$$\boxed{20\%}$$

do preço de venda.

13. Aplicando as variações sucessivas:

$$1,1 \cdot 0,8 \cdot 1,05.$$

$$= 0,924.$$

Logo, o valor final corresponde a:

$$92,4\%$$

do inicial.

Assim, a variação total foi:

$$\boxed{-7,6\%}.$$

14. Queremos:

$$(1 + i)^{18} = 2.$$

Logo:

$$1 + i = \sqrt[18]{2}.$$

Assim:

$$\boxed{i = \sqrt[18]{2} - 1}.$$

Capítulo 9

Fundamentos

1. (a)

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = \boxed{256}.$$

(b)

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = \boxed{27}.$$

(c)

$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = \boxed{15625}.$$

(d)

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = \boxed{0,01}.$$

(e)

$$\frac{2^6 \cdot 4}{8} = \frac{64 \cdot 4}{8} = \boxed{32}.$$

2. (a)

$$0,00056 = \boxed{5,6 \times 10^{-4}}.$$

(b)

$$7\,900\,000 = \boxed{7,9 \times 10^6}.$$

(c)

$$3,2 \times 10^5 = \boxed{320000}.$$

3. Fatorando:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

e

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Logo:

$$\text{MDC}(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = \boxed{42}.$$

$$\text{MMC}(84, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = \boxed{252}.$$

4. (a)

$$360 = \boxed{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

(b)

$$462 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}.$$

5.

$$2310$$

é divisível por:

- 2, pois termina em 0;
- 3, pois:

$$2 + 3 + 1 + 0 = 6,$$

e 6 é múltiplo de 3;

- 5, pois termina em 0;
- não é divisível por 9, pois:

$$2 + 3 + 1 + 0 = 6,$$

e 6 não é múltiplo de 9;

- 11, pois:

$$(2 + 1) - (3 + 0) = 0,$$

e 0 é múltiplo de 11.

6. (a)

$$35\% \text{ de } 240 = 0,35 \cdot 240 = \boxed{84}.$$

(b)

$$12\% \text{ de } 750 = 0,12 \cdot 750 = \boxed{90}.$$

7. (a)

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

(b)

$$\frac{7}{20} = \boxed{0,35}.$$

Aplicação

8. O desconto é:

$$0,15 \cdot 80 = 12.$$

Logo, o preço final é:

$$80 - 12 = 68.$$

Portanto:

$$\boxed{\text{R\$ } 68}.$$

9. Após o aumento de 20%:

$$120 \cdot 1,2 = 144.$$

Depois do desconto de 20%:

$$144 \cdot 0,8 = 115,2.$$

Logo, o preço final não volta a ser R\$ 120.

O preço final é:

$$\boxed{\text{R\$ } 115,20}.$$

10. O crescimento é composto:

$$50000(1,02)^3.$$

$$(1,02)^3 \approx 1,061208.$$

Logo:

$$50000 \cdot 1,061208 \approx 53060.$$

Portanto, a população será aproximadamente:

$$\boxed{53060}.$$

11.

$$\frac{5}{8} \cdot 24 = 15.$$

Portanto, há:

$$\boxed{15}$$

lâmpadas LED.

12. A proporção é:

$$\frac{300}{12} = 25.$$

Logo:

$$25 \cdot 20 = 500.$$

Portanto, serão necessários:

$$\boxed{500 \text{ g}}.$$

13. Às 3h:

- o ponteiro dos minutos está no 12;
- o ponteiro das horas está no 3.

Cada intervalo vale:

$$30^\circ.$$

Logo:

$$3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$

Portanto, o ângulo entre os ponteiros é:

$$\boxed{90^\circ}.$$

14. Retirando 15%:

$$0,15 \cdot 40 = 6.$$

Restam:

$$40 - 6 = 34.$$

Adicionando 6 litros:

$$34 + 6 = 40.$$

Portanto, o tanque fica com:

$$\boxed{40 \text{ L}}.$$

Domínio

15. Se n deixa resto 3 na divisão por 7, então:

$$n = 7q + 3,$$

com:

$$q \in \mathbb{Z}.$$

Logo:

$$\boxed{r = 3}.$$

16. Precisamos calcular:

$$\text{MMC}(12, 18).$$

Fatorando:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Logo:

$$\text{MMC}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = \boxed{36}.$$

17. Precisamos de um número n tal que:

$$n \equiv 1 \pmod{6}$$

e

$$n \equiv 1 \pmod{8}.$$

Assim:

$$n - 1$$

é múltiplo de 6 e de 8.

Assim, $n - 1$ deve ser um múltiplo comum positivo de 6 e 8. O menor deles é

$$\text{MMC}(6, 8) = 24.$$

Portanto:

$$\boxed{n = 25}.$$

18. Como a fração é positiva e própria, temos $1 \leq a < 45$. Para que

$$\frac{a}{45}$$

seja irredutível, é necessário que

$$\text{mdc}(a, 45) = 1.$$

Como:

$$45 = 3^2 \cdot 5,$$

os numeradores possíveis entre 1 e 44 são os coprimos com 45.

A quantidade é dada por:

$$\varphi(45) = 45 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 24.$$

Portanto, existem:

$$\boxed{24}$$

possibilidades.

Coroação

19. Nos juros compostos:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Como:

$$C = 1000$$

e

$$i = 0,01,$$

temos:

$$\boxed{M = 1000(1,01)^n}.$$

20. Os últimos algarismos das potências de 2 formam o ciclo:

$$2, 4, 8, 6.$$

O ciclo possui período 4.

O algarismo 6 aparece quando:

$$n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Logo:

$$\boxed{n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}}.$$

21. Se o número é:

$$100a + 10b + c,$$

o número invertido é:

$$100c + 10b + a.$$

Como o invertido é 198 maior:

$$100c + 10b + a = 100a + 10b + c + 198.$$

Logo:

$$99(c - a) = 198.$$

Assim:

$$c - a = 2.$$

Além disso:

$$a + b + c = 12.$$

Tomando:

$$c = a + 2,$$

temos:

$$a + b + a + 2 = 12.$$

Portanto:

$$2a + b = 10.$$

As soluções possíveis com $a \geq 1$ são:

$$(a, b, c) = (1, 8, 3),$$

$$(a, b, c) = (2, 6, 4),$$

$$(a, b, c) = (3, 4, 5),$$

$$(a, b, c) = (4, 2, 6).$$

Logo, os números são:

183,	264,	345,	426
------	------	------	-----

Capítulo 10

Fundamentos

1. (a)

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = \boxed{256}.$$

(b)

$$\frac{7^6}{7^2} = 7^{6-2} = 7^4 = \boxed{2401}.$$

(c)

$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = \boxed{15625}.$$

2. (a)

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \boxed{\frac{1}{1000}}.$$

(b)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

(c)

$$3^{-2} \cdot 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3 = \boxed{27}.$$

3. (a)

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \boxed{5}.$$

(b)

$$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = \boxed{4}.$$

(c)

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}.$$

Aplicação

4.

$$\frac{a^3 \cdot a^{-5}}{a^{-2}} = \frac{a^{-2}}{a^{-2}} = a^0 = \boxed{1}.$$

5.

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \boxed{4\sqrt{3}}.$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \boxed{6\sqrt{5}}.$$

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \boxed{4\sqrt[3]{3}}.$$

6.

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{7}}.$$

$$\frac{3}{2 + \sqrt{5}} = \frac{3}{2 + \sqrt{5}} \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}.$$

$$= \frac{3(2 - \sqrt{5})}{4 - 5} = -3(2 - \sqrt{5}).$$

$$= \boxed{3\sqrt{5} - 6}.$$

Domínio

7. Temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Multiplicando as duas raízes de mesmo índice, obtemos

$$\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}} = a^{\frac{m+p}{n}}.$$

Agora:

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1+3}{2}} = 9^2 = \boxed{81}.$$

8.

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5.$$

Além disso:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} + \sqrt{12} = \boxed{5 + 2\sqrt{3}}.$$

9.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

No denominador:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1.$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{1} = \boxed{\sqrt{6} + 2}.$$

Coroação

10. Temos:

$$8^x = \frac{1}{16}.$$

Escrevendo em base 2:

$$(2^3)^x = 2^{-4}.$$

Logo:

$$2^{3x} = 2^{-4}.$$

Assim:

$$3x = -4.$$

Portanto:

$$\boxed{x = -\frac{4}{3}}.$$

11.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{\frac{18}{8}} \cdot \sqrt{\frac{50}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{25} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot 5 = \boxed{\frac{15}{2}}.
 \end{aligned}$$

12. Multiplicando numerador e denominador pelo conjugado:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

No denominador:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \boxed{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}}.$$

Capítulo 11

Fundamentos

1. (a)

$$(x + 4)^2 = \boxed{x^2 + 8x + 16}.$$

(b)

$$(3a - 1)^2 = \boxed{9a^2 - 6a + 1}.$$

(c)

$$(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{4x^2 - 25}.$$

(d)

$$(x + y + 1)^2 = \boxed{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y}.$$

2. (a)

$$6x + 12 = \boxed{6(x + 2)}.$$

(b)

$$15a^2b - 10ab^2 = \boxed{5ab(3a - 2b)}.$$

(c)

$$8x^3 - 12x^2 = \boxed{4x^2(2x - 3)}.$$

3. (a)

$$x^2 - 81 = \boxed{(x - 9)(x + 9)}.$$

(b)

$$4y^2 - 49 = \boxed{(2y - 7)(2y + 7)}.$$

(c)

$$9a^2b^2 - 1 = \boxed{(3ab - 1)(3ab + 1)}.$$

4. (a)

$$x^2 + 10x + 25 = \boxed{(x + 5)^2}.$$

(b)

$$4y^2 - 12y + 9 = \boxed{(2y - 3)^2}.$$

(c)

$$a^2 - 14a + 49 = \boxed{(a - 7)^2}.$$

5. (a)

$$x^2 + 9x + 20 = \boxed{(x + 4)(x + 5)}.$$

(b)

$$x^2 - 2x - 15 = \boxed{(x - 5)(x + 3)}.$$

(c)

$$x^2 - 7x + 10 = \boxed{(x - 5)(x - 2)}.$$

6. (a)

$$2x^2 - 3x - 2 = \boxed{(2x + 1)(x - 2)}.$$

(b)

$$3x^2 + 5x - 2 = \boxed{(3x - 1)(x + 2)}.$$

(c)

$$4x^2 - 4x - 8 = 4(x^2 - x - 2) = \boxed{4(x - 2)(x + 1)}.$$

7. (a)

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x - 1) + 4(x - 1) = \boxed{(x - 1)(x^2 + 4)}.$$

(b)

$$a^3 + a^2 - 2a - 2 = a^2(a + 1) - 2(a + 1) = \boxed{(a + 1)(a^2 - 2)}.$$

(c)

$$6x^2 - 9x + 4x - 6 = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) = \boxed{(2x - 3)(3x + 2)}.$$

(d)

$$3ab - 6a + 2b - 4 = 3a(b - 2) + 2(b - 2) = \boxed{(b - 2)(3a + 2)}.$$

8.

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \boxed{x + 5}, \quad (x \neq 5).$$

9.

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5} = \frac{(x + 5)^2}{x + 5} = \boxed{x + 5}, \quad (x \neq -5).$$

10.

$$x^2 - 16 = 0.$$

Fatorando:

$$(x - 4)(x + 4) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4}.$$

Aplicação

11.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2}.$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{x + 3}{x - 3}}, \quad (x \neq 3).$$

12.

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 4}.$$

Simplificando:

$$= \boxed{2}, \quad (x \neq \pm 2).$$

13.

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Fatorando:

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3}.$$

Domínio

14. Para que:

$$x^2 + kx + 16$$

seja um trinômio quadrado perfeito, devemos ter:

$$x^2 \pm 2\sqrt{16}x + 16.$$

Como:

$$2\sqrt{16} = 8,$$

segue que:

$$\boxed{k = 8 \quad \text{ou} \quad k = -8}.$$

15.

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)^2}.$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{x + 4}{x - 4}}, \quad (x \neq 4).$$

16. Temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

e

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Subtraindo:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = \boxed{4ab}.$$

Coroação

17.

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2.$$

Aplicando diferença de quadrados:

$$= (x^2 - 4)(x^2 + 4).$$

Fatorando novamente:

$$= \boxed{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}.$$

18.

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 - 4}.$$

Simplificando:

$$= \boxed{x^2 + 4}, \quad (x \neq \pm 2).$$

19.

$$x^4 - 16 = 0.$$

Fatorando:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0.$$

Logo:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 4 = 0.$$

Nos reais:

$$x^2 + 4 = 0$$

não possui solução.

Assim:

$$\boxed{x = \pm 2}.$$

Capítulo 12

Fundamentos

1. (a)

$$3x^2 - 5x + 2 + 7x^2 + x - 9$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$(3x^2 + 7x^2) + (-5x + x) + (2 - 9)$$

$$\boxed{10x^2 - 4x - 7}.$$

(b)

$$4a^3 - 2a^2 + 3a - (a^3 - 5a^2 + a)$$

Distribuindo o sinal negativo:

$$4a^3 - 2a^2 + 3a - a^3 + 5a^2 - a.$$

Reduzindo:

$$\boxed{3a^3 + 3a^2 + 2a}.$$

2. (a) O maior expoente é 6. Logo:

$$\boxed{\deg(P) = 6}.$$

(b) O maior expoente é 2. Logo:

$$\deg(Q) = 2.$$

(c) Polinômio constante não nulo possui grau 0. Assim:

$$\deg(R) = 0.$$

3. (a)

$$(x + 2)(x - 7) = x^2 - 7x + 2x - 14 = \boxed{x^2 - 5x - 14}.$$

(b)

$$(2x - 1)(x + 4) = 2x^2 + 8x - x - 4 = \boxed{2x^2 + 7x - 4}.$$

(c)

$$(x - 3)^2 = \boxed{x^2 - 6x + 9}.$$

Aplicação

4. Como:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

tomando:

$$y = 3,$$

temos:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = \boxed{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}.$$

5. Dividindo:

$$2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

por:

$$x + 2,$$

obtemos:

$$2x^2 - x + 1$$

com resto:

0.

Logo:

$$2x^3 + 3x^2 - x + 2 = \boxed{(x + 2)(2x^2 - x + 1)}.$$

6. Aplicando Briot–Ruffini para dividir por:

$$x - 1 :$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Logo, o quociente é:

$$\boxed{x^2 + 3x + 2}$$

e o resto é:

$$\boxed{0}.$$

Domínio

7. Pelo Teorema do Resto, basta calcular:

$$P(2).$$

Temos:

$$P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 5.$$

$$= 16 - 24 + 4 - 5.$$

$$= -9.$$

Logo, o resto é:

$$\boxed{-9}.$$

8. Pelo Teorema do Fator, calculamos:

$$P(-1).$$

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4.$$

$$= -1 + 1 + 4 - 4.$$

$$= 0.$$

Logo:

$$x + 1$$

é fator de:

$$P(x).$$

9. Fatorando por agrupamento:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1).$$

$$= (x - 1)(x^2 - 4).$$

Aplicando diferença de quadrados:

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

Logo, as raízes reais são:

$$\boxed{x = 1, \quad x = 2, \quad x = -2}.$$

Coroação

10. Se a é raiz de $P(x)$, então:

$$P(a) = 0.$$

Pelo algoritmo da divisão:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r,$$

onde r é o resto.

Substituindo $x = a$:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + r.$$

$$P(a) = r.$$

Como:

$$P(a) = 0,$$

segue que:

$$r = 0.$$

Logo:

$$(x - a)$$

é fator de:

$$P(x).$$

11. Testando raízes racionais, verificamos que:

$$P(1) = 0.$$

Logo:

$$x - 1$$

é fator.

Dividindo sucessivamente, obtemos:

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 1).$$

Assim:

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = \boxed{(x - 1)^2(x - 2)(x - 3)}.$$

12. Para que:

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 18$$

seja divisível por:

$$(x - 3)^2,$$

devemos ter:

$$P(3) = 0$$

e

$$P'(3) = 0.$$

Calculando:

$$P(3) = 81 + 27a - 63 + 3b + 18.$$

$$27a + 3b + 36 = 0.$$

Dividindo por 3:

$$9a + b + 12 = 0.$$

Agora:

$$P'(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 14x + b.$$

Logo:

$$P'(3) = 108 + 27a - 42 + b.$$

$$27a + b + 66 = 0.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 9a + b = -12 \\ 27a + b = -66 \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$18a = -54.$$

$$a = -3.$$

Substituindo:

$$9(-3) + b = -12.$$

$$-27 + b = -12.$$

$$b = 15.$$

Portanto:

$$\boxed{a = -3 \text{ e } b = 15}.$$

Capítulo 13

Fundamentos

1. (a)

$$3x + 8 = 2 - 5x.$$

Somando $5x$ nos dois lados:

$$8x + 8 = 2.$$

Subtraindo 8:

$$8x = -6.$$

Logo:

$$\boxed{x = -\frac{3}{4}}.$$

(b)

$$4 - 7x < 18.$$

Subtraindo 4:

$$-7x < 14.$$

Dividindo por -7 e invertendo o sinal:

$$\boxed{x > -2}.$$

(c)

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{4} = 1.$$

Multiplicando tudo por 4:

$$2(x-3) - (x+1) = 4.$$

$$2x - 6 - x - 1 = 4.$$

$$x - 7 = 4.$$

Logo:

$$\boxed{x = 11}.$$

2. (a)

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Fatorando:

$$(x - 5)(x - 4) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 5 \quad \text{ou} \quad x = 4}.$$

(b)

$$3x^2 - 12x + 12 = 0.$$

Dividindo por 3:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$(x - 2)^2 = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 2}.$$

(c)

$$2x^2 + x - 6 = 0.$$

Fatorando:

$$(2x - 3)(x + 2) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = -2}.$$

Aplicação

3. Fazendo:

$$y = x^2,$$

temos:

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Fatorando:

$$(y - 4)(y + 2) = 0.$$

Logo:

$$y = 4 \quad \text{ou} \quad y = -2.$$

Como:

$$x^2 \geq 0,$$

descartamos:

$$x^2 = -2.$$

Então:

$$x^2 = 4.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 2}.$$

4. (a)

$$|3x - 1| = 7.$$

Casos:

$$3x - 1 = 7$$

ou

$$3x - 1 = -7.$$

Da primeira:

$$3x = 8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{8}{3}}.$$

Da segunda:

$$3x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -2}.$$

(b)

$$|x - 4| \leq 2.$$

Isso equivale a:

$$-2 \leq x - 4 \leq 2.$$

Somando 4:

$$\boxed{2 \leq x \leq 6}.$$

5.

$$\sqrt{2x + 3} = x.$$

Elevando ao quadrado:

$$2x + 3 = x^2.$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0.$$

Possíveis soluções:

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Verificando:

$$x = -1$$

não serve, pois:

$$\sqrt{1} \neq -1.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3}.$$

6. A área é:

$$(x + 2)(x - 1) = 12.$$

$$x^2 + x - 2 = 12.$$

$$x^2 + x - 14 = 0.$$

Aplicando Bhaskara:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}.$$

Como os lados devem ser positivos:

$$x > 1.$$

Logo:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{57}}{2}.$$

7.

$$x + x^2 = 30.$$

$$x^2 + x - 30 = 0.$$

Fatorando:

$$(x - 5)(x + 6) = 0.$$

Logo:

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -6.$$

Domínio

8. (a)

$$2^{2x-1} = 8.$$

Como:

$$8 = 2^3,$$

temos:

$$2x - 1 = 3.$$

$$2x = 4.$$

Logo:

$$\boxed{x = 2}.$$

(b)

$$9^x = \frac{1}{3}.$$

Escrevendo em base 3:

$$(3^2)^x = 3^{-1}.$$

$$3^{2x} = 3^{-1}.$$

Logo:

$$2x = -1.$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}.$$

9.

$$(x - 2)(x + 5) > 0.$$

Os pontos críticos são:

$$x = -5 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

O produto é positivo quando os fatores possuem mesmo sinal:

$$\boxed{x < -5}$$

ou

$$\boxed{x > 2}.$$

10.

$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq 0.$$

Os pontos críticos são:

$$x = 1$$

e

$$x = -2.$$

Analisando os sinais:

$$-2 < x \leq 1.$$

Logo, o conjunto solução é:

$$\boxed{(-2, 1]}.$$

11.

$$|2x + 3| \geq 5.$$

Casos:

$$2x + 3 \geq 5$$

ou

$$2x + 3 \leq -5.$$

Da primeira:

$$2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1.$$

Da segunda:

$$2x \leq -8 \Rightarrow x \leq -4.$$

Logo:

$$\boxed{x \leq -4 \quad \text{ou} \quad x \geq 1}.$$

Coroação

12.

$$\sqrt{x+1} > x-1.$$

Domínio:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1.$$

Se:

$$x - 1 < 0,$$

a desigualdade é automaticamente verdadeira, pois a raiz é não negativa.

Logo:

$$-1 \leq x < 1.$$

Agora, para:

$$x \geq 1,$$

podemos elevar ao quadrado:

$$x + 1 > (x - 1)^2.$$

$$x + 1 > x^2 - 2x + 1.$$

$$0 > x^2 - 3x.$$

$$x(x - 3) < 0.$$

Logo:

$$0 < x < 3.$$

Intersectando com:

$$x \geq 1,$$

obtemos:

$$1 \leq x < 3.$$

Unindo os intervalos:

$$\boxed{[-1, 3]}.$$

13. A equação:

$$x^2 - kx + 9 = 0$$

possui uma única raiz real quando:

$$\Delta = 0.$$

Temos:

$$\Delta = k^2 - 36.$$

Logo:

$$k^2 - 36 = 0.$$

$$\boxed{k = \pm 6}.$$

14.

$$|x - 2| + |x + 1| = 5.$$

Os pontos críticos são:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Caso 1: $x < -1$

$$-(x - 2) - (x + 1) = 5.$$

$$-2x + 1 = 5.$$

$$x = -2.$$

Caso 2: $-1 \leq x < 2$

$$-(x - 2) + (x + 1) = 5.$$

$$3 = 5.$$

Sem solução.

Caso 3: $x \geq 2$

$$(x - 2) + (x + 1) = 5.$$

$$2x - 1 = 5.$$

$$x = 3.$$

Logo, as soluções são:

$$\boxed{x = -2 \text{ e } x = 3}.$$

Capítulo 14

Fundamentos

1. (a)

$$(x + 3)^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}.$$

(b)

$$(2x - 5)(2x + 5) = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{4x^2 - 25}.$$

(c)

$$(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)^2.$$

$$= (x - 1)(x^2 - 2x + 1).$$

$$= \boxed{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

(d)

$$(3x + 2)^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}.$$

2. (a)

$$x^2 - 9 = \boxed{(x - 3)(x + 3)}.$$

(b)

$$3x^2 - 12x = \boxed{3x(x - 4)}.$$

(c)

$$x^2 + 5x + 6 = \boxed{(x + 2)(x + 3)}.$$

(d)

$$4x^2 - 25 = \boxed{(2x - 5)(2x + 5)}.$$

(e)

$$x^2 - 6x + 9 = \boxed{(x - 3)^2}.$$

3.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \boxed{x + 2}, \quad (x \neq 2).$$

4.

$$\frac{2x^2 - 8x}{2x} = \frac{2x(x - 4)}{2x} = \boxed{x - 4}.$$

Restrição:

$$x \neq 0.$$

5. (a)

$$2x - 7 = 5.$$

$$2x = 12.$$

$$\boxed{x = 6}.$$

(b)

$$x^2 - 5x = 0.$$

$$x(x - 5) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 5}.$$

6.

$$x^2 - 9 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3}.$$

Aplicação

7. A área é:

$$A(x) = (x + 2)(x - 1).$$

Desenvolvendo:

$$\boxed{A(x) = x^2 + x - 2}.$$

8.

$$\frac{x + 1}{x - 2} = 3.$$

Multiplicando em cruz:

$$x + 1 = 3(x - 2).$$

$$x + 1 = 3x - 6.$$

$$7 = 2x.$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2}}.$$

Restrição:

$$x \neq 2.$$

9.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} = 1.$$

Multiplicando por:

$$x(x + 1) :$$

$$2(x + 1) + 3x = x(x + 1).$$

$$2x + 2 + 3x = x^2 + x.$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Aplicando Bhaskara:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2}.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}.$$

$$x = \boxed{2 \pm \sqrt{6}}.$$

Restrições:

$$x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1.$$

10.

$$x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Aplicando Bhaskara:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}.$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}.$$

$$x = \boxed{-2 \pm \sqrt{3}}.$$

11.

$$n(n+1) = 132.$$

$$n^2 + n - 132 = 0.$$

Fatorando:

$$(n-11)(n+12) = 0.$$

Como n é natural:

$$\boxed{n = 11}.$$

12. Se o lado mede:

$$x + 1,$$

então:

$$A = (x + 1)^2 = \boxed{x^2 + 2x + 1}.$$

O perímetro é:

$$P = 4(x + 1) = \boxed{4x + 4}.$$

13. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25.$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25.$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0.$$

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Como comprimento é positivo:

$$\boxed{x = 3}.$$

Domínio

14.

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 5}.$$

15.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}.$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{x - 1}{x + 1}}, \quad (x \neq -1).$$

16. Sabemos que:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Logo:

$$7^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot 10.$$

$$49 = x^2 + y^2 + 20.$$

Assim:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 29}.$$

17.

$$(x - 2)(x + 3) \geq 0.$$

Os pontos críticos são:

$$x = -3 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

O produto é não negativo quando os fatores possuem mesmo sinal:

$$\boxed{x \leq -3}$$

ou

$$\boxed{x \geq 2}.$$

18.

$$\frac{x - 1}{x + 2} < 0.$$

Os pontos críticos são:

$$x = 1 \quad \text{e} \quad x = -2.$$

Analisando os sinais:

$$-2 < x < 1.$$

Logo, o conjunto solução é:

$$\boxed{(-2, 1)}.$$

Coroação

19.

$$|x^2 - 4x| = 3.$$

Casos:

$$x^2 - 4x = 3$$

ou

$$x^2 - 4x = -3.$$

Primeiro caso:

$$x^2 - 4x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}.$$

Segundo caso:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Logo:

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 2 - \sqrt{7}, \quad x = 2 + \sqrt{7}, \quad x = 1, \quad x = 3}.$$

20. Queremos:

$$P(x + 1) - P(x) = 2x.$$

Como o lado direito é polinômio de grau 1, procuramos $P(x)$ de grau 2:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Então:

$$P(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c.$$

$$= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c.$$

Subtraindo $P(x)$:

$$P(x+1) - P(x) = 2ax + a + b.$$

Igualando a:

$$2x,$$

temos:

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1,$$

e

$$a + b = 0 \Rightarrow b = -1.$$

O termo c é arbitrário.

Logo:

$$\boxed{P(x) = x^2 - x + c, \quad c \in \mathbb{R}}.$$

21. Temos:

$$x + y = 5$$

e

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Usando:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

obtemos:

$$25 = 13 + 2xy.$$

$$2xy = 12.$$

$$xy = 6.$$

Logo, x e y são raízes de:

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0.$$

Assim:

$$(x, y) = (2, 3)$$

ou

$$(x, y) = (3, 2).$$

Capítulo 15

Fundamentos

1. (a) A relação R define uma função de A em B , pois cada elemento de A está associado a exatamente um elemento de B .

- (b) • Domínio:

$$A = \{0, 1, 2\}.$$

- Contradomínio:

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

- Imagem:

$$\text{Im}(R) = \{1, 3\}.$$

2. (a)

$$f(x) = 2x + 1.$$

$$f(-2) = 2(-2) + 1 = \boxed{-3}.$$

$$f(0) = 2(0) + 1 = \boxed{1}.$$

$$f(3) = 2(3) + 1 = \boxed{7}.$$

(b) Para verificar se $(1, 5)$ pertence ao gráfico, calculamos:

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3.$$

Como:

$$f(1) \neq 5,$$

o ponto $(1, 5)$ não pertence ao gráfico da função.

Aplicação

3. (a)

$$x^2 + y^2 = 9$$

não representa uma função, pois existem valores de x associados a dois valores distintos de y .

Por exemplo:

$$x = 0$$

produz:

$$y = 3 \quad \text{e} \quad y = -3.$$

Logo, falha no teste da reta vertical.

(b)

$$y = \pm\sqrt{x}$$

também não representa uma função, pois cada valor positivo de x possui dois valores de y .

Por exemplo:

$$x = 4$$

gera:

$$y = 2 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

4.

$$h(x) = -(x - 1)^2 + 3.$$

(a) A parábola possui concavidade voltada para baixo e vértice em:

$$\boxed{(1, 3)}.$$

Logo:

- a função é crescente em:

$$(-\infty, 1);$$

- a função é decrescente em:

$$(1, +\infty).$$

(b) O valor máximo é:

$$\boxed{3},$$

atingido quando:

$$x = 1.$$

Domínio

5. (a)

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 9}.$$

O denominador não pode ser zero:

$$x^2 - 9 \neq 0.$$

$$(x - 3)(x + 3) \neq 0.$$

Logo:

$$x \neq 3 \quad \text{e} \quad x \neq -3.$$

Assim, o domínio é:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}}.$$

(b)

$$g(x) = \sqrt{5 - 2x}.$$

O radicando deve ser não negativo:

$$5 - 2x \geq 0.$$

$$x \leq \frac{5}{2}.$$

Logo, o domínio é:

$$\boxed{(-\infty, \frac{5}{2}]}$$

6.

$$f(x) = x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

(a)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \boxed{\sqrt{x+2}}.$$

Precisamos de:

$$x + 2 \geq 0.$$

Logo:

$$x \geq -2.$$

O domínio é:

$$\boxed{[-2, +\infty)}.$$

(b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \boxed{\sqrt{x} + 2}.$$

Precisamos de:

$$x \geq 0.$$

Logo, o domínio é:

$$\boxed{[0, +\infty)}.$$

Coroação

7.

$$f(x) = 3x - 1.$$

(a) Escrevendo:

$$y = 3x - 1,$$

isolamos x :

$$y + 1 = 3x.$$

$$x = \frac{y+1}{3}.$$

Logo:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}}.$$

(b) Queremos resolver:

$$f(x) = 8.$$

Usando a inversa:

$$x = f^{-1}(8).$$

$$x = \frac{8+1}{3} = \boxed{3}.$$

8. (a)

$$f(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Escrevendo:

$$y = \frac{x-1}{2},$$

temos:

$$2y = x - 1.$$

$$x = 2y + 1.$$

Logo:

$$\boxed{f^{-1}(x) = 2x + 1}.$$

(b)

$$g(x) = x^2.$$

Essa função não é invertível em $\mathbb{R}$, pois não é injetiva.
Por exemplo:

$$g(2) = g(-2) = 4.$$

Restringindo o domínio para:

$$x \geq 0,$$

a função torna-se invertível.

Nesse caso:

$$y = x^2$$

implica:

$$x = \sqrt{y}.$$

Logo:

$$\boxed{g^{-1}(x) = \sqrt{x}}.$$

Capítulo 16

Fundamentos

1.

$$f(x) = 3x + 6 \quad g(x) = -2x + 5 \quad h(x) = 4$$

(a) Para:

$$f(x) = 3x + 6,$$

temos:

$$\boxed{a = 3, \quad b = 6}.$$

Para:

$$g(x) = -2x + 5,$$

temos:

$$\boxed{a = -2, \quad b = 5}.$$

Para:

$$h(x) = 4,$$

temos:

$$\boxed{a = 0, \quad b = 4}.$$

(b) Como:

$$a > 0,$$

a função:

$$f(x) = 3x + 6$$

é crescente.

Como:

$$a < 0,$$

a função:

$$g(x) = -2x + 5$$

é decrescente.

Como:

$$a = 0,$$

a função:

$$h(x) = 4$$

é constante.

(c) Para:

$$f(x) = 3x + 6,$$

$$3x + 6 = 0$$

$$x = -2.$$

Logo, o zero é:

$$\boxed{x = -2}.$$

Para:

$$g(x) = -2x + 5,$$

$$-2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}.$$

Logo, o zero é:

$$\boxed{x = \frac{5}{2}}.$$

A função:

$$h(x) = 4$$

não possui zero.

2. A reta passa pelos pontos $(0, -1)$ e $(2, 0)$. Seu coeficiente angular é

$$a = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Como o termo independente é -1 , sua equação é

$$y = \frac{1}{2}x - 1.$$

3.

$$q(x) = x^2 - 4x + 3.$$

(a)

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3.$$

(b) O vértice possui coordenadas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y_v = q(2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Logo, o vértice é:

$$(2, -1).$$

(c) Como:

$$a = 1 > 0,$$

a concavidade é voltada para cima.

Aplicação

4. (a) O custo é dado por:

$$C(x) = 2,5x + 6.$$

(b)

$$C(12) = 2,5 \cdot 12 + 6.$$

$$= 30 + 6 = 36.$$

Logo, o custo é:

$$\text{R\$ } 36,00.$$

5.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

(a) Aplicando Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16.$$

Logo:

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Assim:

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3}.$$

(b) Soma das raízes:

$$1 + (-3) = -2 = -\frac{b}{a}.$$

Produto:

$$1 \cdot (-3) = -3 = \frac{c}{a}.$$

Logo, os valores estão corretos.

(c)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$y_v = f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4.$$

Logo, o vértice é:

$$\boxed{(-1, -4)}.$$

(d) Como:

$$a > 0,$$

a parábola possui valor mínimo.

O valor mínimo é:

$$\boxed{-4}.$$

Domínio

6.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

(a) A parábola possui vértice em:

$$(2, -1).$$

Calculando nos extremos:

$$f(0) = 3, \quad f(4) = 3.$$

Logo, no intervalo:

$$[0, 4],$$

a imagem é:

$$\boxed{[-1, 3]}.$$

(b)

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Fatorando:

$$(x - 1)(x - 3) \leq 0.$$

Logo:

$$\boxed{1 \leq x \leq 3}.$$

7. A equação:

$$x^2 - mx + 4 = 0$$

possui raízes reais e distintas quando:

$$\Delta > 0.$$

Temos:

$$\Delta = m^2 - 16.$$

Logo:

$$m^2 - 16 > 0.$$

$$m^2 > 16.$$

Assim:

$$\boxed{m < -4 \quad \text{ou} \quad m > 4}.$$

Coroação

8.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

(a)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2.$$

$$y_v = g(2) = -4 + 8 - 1 = 3.$$

Logo, o vértice é:

$$\boxed{(2, 3)}.$$

(b) Como:

$$a < 0,$$

a parábola possui valor máximo.

O valor máximo é:

$$\boxed{3}.$$

(c) Calculando o discriminante:

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(-1) = 16 - 4 = 12.$$

Como:

$$\Delta > 0,$$

o gráfico corta o eixo x em dois pontos distintos.

9.

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

(a) O instante do vértice é:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-5)} = 2.$$

A altura máxima é:

$$h(2) = -5(4) + 20(2) + 1.$$

$$= -20 + 40 + 1 = 21.$$

Logo, a altura máxima é:

$$\boxed{21 \text{ m}}.$$

(b) A altura máxima ocorre em:

$$\boxed{t = 2 \text{ s}}.$$

(c) A bola atinge o solo quando:

$$h(t) = 0.$$

$$-5t^2 + 20t + 1 = 0.$$

Multiplicando por -1 :

$$5t^2 - 20t - 1 = 0.$$

Aplicando Bhaskara:

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 20}}{10}.$$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{420}}{10}.$$

$$t = \frac{20 \pm 2\sqrt{105}}{10}.$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{105}}{5}.$$

Como o tempo deve ser positivo:

$$t = \frac{10 + \sqrt{105}}{5}.$$

$$\boxed{t \approx 4,05 \text{ s}}.$$

Capítulo 17

Fundamentos

1. (a)

$$f(x) = |x|$$

Domínio:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Imagem:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty).$$

A função é:

- decrescente em $(-\infty, 0]$;
- crescente em $[0, +\infty)$.

Logo, não é totalmente crescente nem totalmente decrescente.

(b)

$$g(x) = 3^x$$

Domínio:

$$D(g) = \mathbb{R}.$$

Imagem:

$$\text{Im}(g) = (0, +\infty).$$

Como a base é maior que 1, a função é crescente.

(c)

$$h(x) = \log_2(x)$$

Domínio:

$$D(h) = (0, +\infty).$$

Imagem:

$$\text{Im}(h) = \mathbb{R}.$$

Como a base é maior que 1, a função é crescente.

2.

$$|x - 4| = 5.$$

Casos:

$$x - 4 = 5$$

ou

$$x - 4 = -5.$$

Logo:

$$\boxed{x = 9 \quad \text{ou} \quad x = -1}.$$

3.

$$|2x + 3| = 9.$$

Casos:

$$2x + 3 = 9$$

ou

$$2x + 3 = -9.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -6}.$$

4. (a)

$$|x + 1| \leq 3.$$

$$-3 \leq x + 1 \leq 3.$$

$$\boxed{-4 \leq x \leq 2}.$$

(b)

$$|3x - 2| > 4.$$

Casos:

$$3x - 2 > 4$$

ou

$$3x - 2 < -4.$$

Logo:

$$\boxed{x > 2}$$

ou

$$\boxed{x < -\frac{2}{3}}.$$

5. (a)

$$|x| - 6 = 0.$$

$$|x| = 6.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 6}.$$

(b)

$$2^x - 16 = 0.$$

$$2^x = 16 = 2^4.$$

Logo:

$$\boxed{x = 4}.$$

(c)

$$\log_5(x) - 1 = 0.$$

$$\log_5(x) = 1.$$

Logo:

$$\boxed{x = 5}.$$

6.

x	-2	-1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

7.

x	1	3	9	27
$\log_3(x)$	0	1	2	3

8.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1, \\ 5, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(-2) = \boxed{0}.$$

$$f(0) = \boxed{2}.$$

$$f(1) = \boxed{5}.$$

$$f(4) = \boxed{5}.$$

9. (a)

$$y = f(x) + 2$$

→ deslocamento vertical para cima.

(b)

$$y = f(x - 4)$$

→ deslocamento horizontal para a direita.

(c)

$$y = -f(x)$$

→ reflexão em relação ao eixo x .

(d)

$$y = f(-x)$$

→ reflexão em relação ao eixo y .

Aplicação

10.

$$P(t) = 200 \cdot 2^t.$$

(a)

$$P(0) = 200 \cdot 2^0 = \boxed{200}.$$

(b)

$$P(4) = 200 \cdot 2^4 = 200 \cdot 16 = \boxed{3200}.$$

(c) Queremos:

$$200 \cdot 2^t = 3200.$$

$$2^t = 16 = 2^4.$$

Logo:

$$\boxed{t = 4}.$$

11.

$$V(t) = 50000(0,9)^t.$$

(a) Como:

$$0 < 0,9 < 1,$$

a função é decrescente.

(b)

$$V(3) = 50000(0,9)^3.$$

$$= 50000(0,729) = 36450.$$

Logo:

$$\boxed{V(3) = \text{R\$ } 36450}.$$

(c)

$$V(5) = 50000(0,9)^5.$$

$$= 50000(0,59049) \approx \boxed{29524,5}.$$

Logo, o valor não permanecerá acima de:

$$\text{R\$ } 30000.$$

12.

$$d(x) = |x - 8|.$$

(a)

$$d(2) = |2 - 8| = \boxed{6}.$$

(b)

$$d(13) = |13 - 8| = \boxed{5}.$$

(c)

$$|x - 8| = 5.$$

Logo:

$$x - 8 = 5$$

ou

$$x - 8 = -5.$$

Assim:

$$\boxed{x = 13 \quad \text{ou} \quad x = 3}.$$

13.

$$2^x = 64 = 2^6.$$

Logo:

$$\boxed{x = 6}.$$

14.

$$\log_3(x) = 4.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3^4 = 81}.$$

15.

$$\log_2(x - 1) = 3.$$

$$x - 1 = 2^3 = 8.$$

Logo:

$$\boxed{x = 9}.$$

16.

$$P(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 3, \\ 10 + 3(x - 3), & x > 3. \end{cases}$$

(a)

$$P(2) = \boxed{10}.$$

(b)

$$P(3) = \boxed{10}.$$

(c)

$$P(7) = 10 + 3(7 - 3).$$

$$= 10 + 12 = \boxed{22}.$$

17. Para obter:

$$y = -|x - 1| + 4$$

a partir de:

$$y = |x|,$$

fazemos:

- deslocamento de 1 unidade para a direita;
- reflexão em relação ao eixo x ;
- deslocamento de 4 unidades para cima.

Domínio

18.

$$|3x - 1| = |x + 5|.$$

Elevando ao quadrado:

$$(3x - 1)^2 = (x + 5)^2.$$

$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 10x + 25.$$

$$8x^2 - 16x - 24 = 0.$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1}.$$

19.

$$|x - 2| + |x + 1| = 7.$$

Pontos críticos:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Após análise por casos:

$$\boxed{x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 4}.$$

20.

$$2^{x+2} = 32 = 2^5.$$

Logo:

$$x + 2 = 5.$$

$$\boxed{x = 3}.$$

21.

$$5^{2x-1} = 125 = 5^3.$$

Logo:

$$2x - 1 = 3.$$

$$\boxed{x = 2}.$$

22.

$$\log_2(x-2) + \log_2(x-6) = 4.$$

Domínio:

$$x > 6.$$

Somando logaritmos:

$$\log_2[(x-2)(x-6)] = 4.$$

$$(x-2)(x-6) = 16.$$

$$x^2 - 8x + 12 = 16.$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0.$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{5}.$$

Como:

$$x > 6,$$

fica:

$$\boxed{x = 4 + 2\sqrt{5}}.$$

23.

$$\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 2.$$

Domínio:

$$x > 1.$$

$$\log_3\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2.$$

$$\frac{x+2}{x-1} = 9.$$

$$x+2 = 9x-9.$$

$$11 = 8x.$$

$$x = \frac{11}{8}.$$

24.

$$f(x) = |x + 3| - 2.$$

Domínio:

$$\mathbb{R}.$$

Imagem:

$$[-2, +\infty).$$

25.

$$g(x) = 3^{x-2} + 1.$$

Domínio:

$$\mathbb{R}.$$

Imagem:

$$(1, +\infty).$$

26.

$$h(x) = \log_2(x - 5) + 4.$$

Domínio:

$$(5, +\infty).$$

Imagem:

$$\mathbb{R}.$$

27. O gráfico é composto por:

- a reta:

$$y = x + 1, \quad x < 0;$$

- o trecho da parábola:

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3;$$

- a reta horizontal:

$$y = 5, \quad x > 3.$$

28. (a) A função é:

$$M(t) = 640 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/6}.$$

- (b)

$$\begin{aligned} M(18) &= 640 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\ &= 640 \cdot \frac{1}{8} = 80. \end{aligned}$$

$$M(18) = 80 \text{ g}.$$

- (c) Queremos:

$$640 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/6} = 80.$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{t/6} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} \right)^3.$$

Logo:

$$\frac{t}{6} = 3.$$

$$t = 18.$$

Coroação

- 29.

$$|x^2 - 9| = 0.$$

Logo:

$$x^2 - 9 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0.$$

$$\boxed{x = \pm 3}.$$

30.

$$|x - 4| + |x + 2| = 10.$$

Após análise por casos:

$$\boxed{x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 6}.$$

31.

$$2^x + 2^{x+2} = 40.$$

$$2^x + 4 \cdot 2^x = 40.$$

$$5 \cdot 2^x = 40.$$

$$2^x = 8 = 2^3.$$

Logo:

$$\boxed{x = 3}.$$

32.

$$\log_2(x) + \log_2(x - 4) = 4.$$

Domínio:

$$x > 4.$$

$$\log_2[x(x - 4)] = 4.$$

$$x(x - 4) = 16.$$

$$x^2 - 4x - 16 = 0.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{5}.$$

Como:

$$x > 4,$$

segue:

$$\boxed{x = 2 + 2\sqrt{5}}.$$

33.

$$\log_3(x+1) = \log_9(3x-6).$$

Como:

$$\log_9(a) = \frac{1}{2} \log_3(a),$$

temos:

$$\log_3(x+1) = \frac{1}{2} \log_3(3x-6).$$

$$2\log_3(x+1) = \log_3(3x-6).$$

$$\log_3[(x+1)^2] = \log_3(3x-6).$$

$$(x+1)^2 = 3x-6.$$

$$x^2 - x + 7 = 0.$$

O discriminante é:

$$\Delta = 1 - 28 = -27 < 0.$$

Logo, $\boxed{\text{não há solução real}}.$

34.

$$f(x) = |x-1| + |x+3|.$$

(a) Pontos críticos:

$$x = -3 \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -3, \\ 4, & -3 \leq x < 1, \\ 2x + 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

(b) O valor mínimo é:

$$\boxed{4}.$$

(c)

$$f(x) = 9.$$

Primeiro intervalo:

$$-2x - 2 = 9 \Rightarrow x = -\frac{11}{2}.$$

Terceiro intervalo:

$$2x + 2 = 9 \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Logo:

$$\boxed{x = -\frac{11}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2}}.$$

35.

$$3^{|x-2|} = 27 = 3^3.$$

Logo:

$$|x - 2| = 3.$$

$$x - 2 = 3$$

ou

$$x - 2 = -3.$$

Assim:

$$\boxed{x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -1}.$$

36.

$$\log_2(|x - 4|) = 2.$$

$$|x - 4| = 4.$$

$$x - 4 = 4$$

ou

$$x - 4 = -4.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8 \quad \text{ou} \quad x = 0}.$$

37.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -2, \\ x^2 - 1, & -2 \leq x \leq 2, \\ 2x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

(a)

$$f(-4) = \boxed{1}.$$

$$f(0) = \boxed{-1}.$$

$$f(3) = \boxed{7}.$$

(b) Zeros:

Primeiro trecho:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5.$$

Segundo trecho:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Terceiro trecho:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

mas esse valor não pertence ao intervalo $x > 2$.

Logo, os zeros são:

$$\boxed{x = -5, \quad x = -1, \quad x = 1}.$$

(c) O gráfico é formado por:

- a reta:

$$y = x + 5, \quad x < -2;$$

- o trecho da parábola:

$$y = x^2 - 1, \quad -2 \leq x \leq 2;$$

- a reta:

$$y = 2x + 1, \quad x > 2.$$

Capítulo 18

Fundamentos

1. (a)

$$\log_2(32) = \boxed{5}.$$

(b)

$$\log_3(1) = \boxed{0}.$$

(c)

$$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5(5^{-2}) = \boxed{-2}.$$

2. (a)

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2(32) = \boxed{5}.$$

(b)

$$\log_3\left(\frac{81}{3}\right) = \log_3(27) = \boxed{3}.$$

(c)

$$\log_2\left(\frac{x^2}{4}\right) = \log_2(x^2) - \log_2(4) = \boxed{2\log_2(x) - 2}.$$

Aplicação

3. (a)

$$\log_2(x - 3) = 4 \Rightarrow x - 3 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 19}.$$

(b)

$$\log_5(2x) = \log_5(10) \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5}.$$

4.

$$\log_2(x) + \log_2(x - 1) = 3.$$

$$\log_2[x(x - 1)] = 3.$$

$$x(x - 1) = 8.$$

$$x^2 - x - 8 = 0.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Como:

$$x > 1,$$

segue:

$$\boxed{x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}}.$$

Domínio

5. (a)

$$f(x) = \log_3(2x - 1).$$

Precisamos de:

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Domínio:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}.$$

(b)

$$g(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{x-2}\right).$$

Precisamos de:

$$\frac{x+1}{x-2} > 0.$$

Pontos críticos:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Analisando os sinais:

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

Domínio:

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}.$$

6.

$$\log_2(x) \geq 1.$$

Como a base é maior que 1:

$$x \geq 2^1.$$

Logo:

$$\boxed{x \geq 2}.$$

Coroação

7.

$$\log_{1/2}(x) \leq -2.$$

Como:

$$0 < \frac{1}{2} < 1,$$

a função logarítmica é decrescente, então o sinal inverte:

$$x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

$$\boxed{x \geq 4}.$$

8. Se:

$$\log_a(x) = 0,$$

então:

$$x = a^0 = 1.$$

Reciprocamente, se:

$$x = 1,$$

então:

$$\log_a(1) = 0,$$

pois:

$$a^0 = 1.$$

Logo:

$$\log_a(x) = 0 \iff x = 1.$$

Capítulo 19

Fundamentos

1.

$$f(x) = 2x - 3.$$

(a)

$$f(0) = \boxed{-3}.$$

(b)

$$f(5) = 10 - 3 = \boxed{7}.$$

(c)

$$2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5}.$$

2.

$$g(x) = x^2 - 4x.$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4}.$$

3. (a)

$$h(x) = \sqrt{x-2}.$$

Precisamos de:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$$

Domínio:

$$\boxed{[2, +\infty)}.$$

(b)

$$p(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Precisamos de:

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1.$$

Domínio:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}.$$

4.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Como:

$$g(x) = 3x,$$

temos:

$$f(g(x)) = f(3x) = 3x + 2.$$

Logo:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = 3x + 2}.$$

5.

$$f(x) = x^2 - 1.$$

(a)

$$f(-2) = 4 - 1 = \boxed{3}.$$

(b)

$$f(3) = 9 - 1 = \boxed{8}.$$

(c)

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 1}.$$

6. A relação é reflexiva, pois:

$$a - a = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Também é simétrica, pois se:

$$a - b \in \mathbb{Z},$$

então:

$$b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}.$$

Aplicação

7.

$$f(x) = |x - 2|.$$

$$f(-1) = \boxed{3}.$$

$$f(2) = \boxed{0}.$$

$$f(7) = \boxed{5}.$$

8.

$$y = 3x - 6.$$

$$x = \frac{y + 6}{3}.$$

Logo:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{3}}.$$

9. Coeficiente angular:

$$a = \frac{0 - 4}{5 - 1} = -1.$$

Logo:

$$y = -x + b.$$

Usando o ponto $(1, 4)$:

$$4 = -1 + b \Rightarrow b = 5.$$

Portanto:

$$\boxed{f(x) = -x + 5}.$$

10. As interseções são:

• eixo y :

$$\boxed{(0, 3)};$$

• eixo x :

$$\boxed{(3, 0)}.$$

11.

$$y = x^2 - 4x + 1.$$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2} = 2.$$

$$y_v = 2^2 - 4(2) + 1 = -3.$$

Vértice:

$$\boxed{(2, -3)}.$$

Valor mínimo:

$$\boxed{-3}.$$

12.

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}.$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Logo, os pontos são:

$$(2 - \sqrt{3}, 0) \text{ e } (2 + \sqrt{3}, 0).$$

13.

$$C(x) = 50 + 8x.$$

$$C(0) = 50.$$

Isso representa o custo fixo da produção.

Domínio

14.

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

$$(x - 2)(x - 3) \geq 0.$$

Logo:

$$x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3.$$

15.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$x_v = \frac{-(-2)}{2} = 1.$$

A função é:

- decrescente em:

$$(-\infty, 1);$$

- crescente em:

$$(1, +\infty).$$

16.

$$\frac{x - 1}{x + 2} = 2.$$

$$x - 1 = 2x + 4.$$

$$\boxed{x = -5}.$$

Como:

$$-5 \neq -2,$$

a solução é válida.

17.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Como:

$$x^2 + 1 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$,
o domínio é:

$$\boxed{\mathbb{R}}.$$

Além disso:

$$x^2 + 1 \geq 1.$$

Logo:

$$0 < f(x) \leq 1.$$

Imagem:

$$\boxed{(0, 1]}.$$

18.

$$|x - 3| \leq 2.$$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2.$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 5}.$$

Coroação

19.

$$f(x) = ax + b.$$

Temos:

$$2a + b = 7$$

e

$$-a + b = 1.$$

Subtraindo:

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2.$$

Então:

$$-2 + b = 1 \Rightarrow b = 3.$$

Logo:

$$\boxed{a = 2, \quad b = 3}.$$

20.

$$|x^2 - 4| < 3.$$

$$-3 < x^2 - 4 < 3.$$

$$1 < x^2 < 7.$$

Logo:

$$\boxed{-\sqrt{7} < x < -1}$$

ou

$$\boxed{1 < x < \sqrt{7}}.$$

21. Se as raízes são:

$$2 \text{ e } -5,$$

então:

$$f(x) = (x - 2)(x + 5).$$

$$f(x) = x^2 + 3x - 10.$$

Logo:

$$\boxed{p = 3, \quad q = -10}.$$

Capítulo 20

Fundamentos

1. (a)

$$7! = \boxed{5040}.$$

(b)

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = \boxed{56}.$$

(c)

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! 7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = \boxed{36}.$$

2. A palavra **BANANA** possui:

6 letras,

com repetições:

$$A : 3, \quad N : 2.$$

Logo:

$$\frac{6!}{3! 2!} = \frac{720}{12} = \boxed{60}.$$

Aplicação

3. Escolhendo representante e suplente:

$$12 \cdot 11 = \boxed{132}.$$

4.

$$\binom{52}{5} = \boxed{2598960}.$$

Domínio

5. Há:

$$26 + 10 = 36$$

possibilidades para cada caractere.

Como há repetição:

$$36^6 = \boxed{2176782336}.$$

6. O primeiro algarismo possui:

9

opções (1 a 9).

Depois restam:

9, 8, 7, 6

opções.

Logo:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \boxed{27216}.$$

Coroação

7. Pelo binômio de Newton:

$$(x + 2)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^{7-k} 2^k.$$

Queremos o termo com:

$$x^4.$$

Então:

$$7 - k = 4 \Rightarrow k = 3.$$

Coeficiente:

$$\binom{7}{3} \cdot 2^3 = 35 \cdot 8 = \boxed{280}.$$

8. Um conjunto com 8 elementos possui:

$$2^8 = \boxed{256}$$

subconjuntos.

9. Em uma disposição circular, fixamos uma pessoa e ordenamos as outras seis ao redor dela. Assim,

$$(7 - 1)! = 6! = \boxed{720}.$$

10. Há 10^5 sequências de cinco algarismos. As sequências que não contêm o algarismo 7 têm nove opções em cada posição, totalizando 9^5 . Pela contagem do complemento,

$$10^5 - 9^5 = 100000 - 59049 = \boxed{40951}.$$

11. Representamos os oito doces idênticos por estrelas e usamos três barras para separar as partes das quatro crianças. Portanto,

$$\binom{8 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{11}{3} = \boxed{165}.$$

12. Todo caminho possui cinco passos para a direita e quatro para cima, em alguma ordem. Basta escolher quais quatro das nove posições serão ocupadas pelos passos para cima:

$$\binom{9}{4} = \boxed{126}.$$

Capítulo 21

Fundamentos

1. No lançamento de um dado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- (a) Números pares:

$$\{2, 4, 6\}.$$

Logo:

$$P = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b) Números maiores que 4:

$$\{5, 6\}.$$

Logo:

$$P = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

(c) Números primos:

$$\{2, 3, 5\}.$$

Logo:

$$P = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. Total de resultados:

$$2^3 = 8.$$

Casos favoráveis:

CCK, CKC, KCC.

Logo:

$$P = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Aplicação

3.

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F).$$

$$= 0,55 + 0,35 - 0,20.$$

$$= \boxed{0,70}.$$

4.

$$P = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \boxed{\frac{5}{14}}.$$

Domínio

5. Sabendo que a primeira foi azul, restam:

4 vermelhas e 5 azuis.

Total:

9.

Logo:

$$P = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

6. Sim.

Temos:

$$P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$$

e

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Além disso:

$$P(\text{coroa e par}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Como:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

os eventos são independentes.

Coroação

7. Há:

4

naipes e:

3

figuras por naipe.

Logo:

12

figuras no baralho.

Assim:

$$P = \frac{12}{52} = \boxed{\frac{3}{13}}.$$

8. Total de senhas:

$$26^2 \cdot 10^2.$$

Senhas começando com A:

$$26 \cdot 10^2.$$

Logo:

$$P = \frac{26 \cdot 10^2}{26^2 \cdot 10^2} = \boxed{\frac{1}{26}}.$$

9. Seja (D) o evento “peça defeituosa”.

(a) Pela fórmula da probabilidade total,

$$P(D) = 0,70 \cdot 0,01 + 0,30 \cdot 0,04.$$

Logo,

$$P(D) = 0,007 + 0,012 = \boxed{0,019}.$$

(b) Pelo Teorema de Bayes,

$$P(B | D) = \frac{P(B)P(D | B)}{P(D)} = \frac{0,30 \cdot 0,04}{0,019}.$$

Portanto,

$$P(B \mid D) = \frac{12}{19} \approx 0,632.$$

10. O número de acertos em cinco lances segue um modelo binomial com

$$n = 5, \quad k = 4, \quad p = 0,8.$$

Assim,

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} (0,8)^4 (0,2).$$

Logo,

$$P(X = 4) = 5 \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = \boxed{0,4096}.$$

11. Seja (B) o evento “pelo menos um dado mostrou (3)”. Os resultados condicionados são

$$(3, 1), (3, 2), \dots, (3, 6),$$

e

$$(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3).$$

Há (11) resultados em (B). Entre eles, a soma é (8) nos casos

$$(3, 5) \quad \text{e} \quad (5, 3).$$

Portanto,

$$P(\text{soma } 8 \mid B) = \frac{2}{11}.$$

12. Se (A) e (B) são disjuntos, então

$$P(A \cap B) = 0.$$

Como $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, temos

$$P(A)P(B) > 0.$$

Logo,

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B),$$

e a condição de independência não é satisfeita. Portanto, (A) e (B) são dependentes.

Capítulo 22

Fundamentos

1. (a) A sequência:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

é uma PA de razão:

$$\boxed{r = 3}.$$

- (b) A sequência:

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

é uma PG de razão:

$$\boxed{q = 3}.$$

- (c) A sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

não é PA nem PG.

- 2.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

$$a_{12} = 3 + 11 \cdot 5.$$

$$\boxed{a_{12} = 58}.$$

Aplicação

- 3.

$$a_{30} = 2 + 29 \cdot 4 = 118.$$

$$S_{30} = \frac{30(2 + 118)}{2}.$$

$$\boxed{S_{30} = 1800}.$$

4.

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

$$a_6 = 81 \left(\frac{1}{3} \right)^5.$$

$$\boxed{a_6 = \frac{1}{3}}.$$

Domínio

5. (a) A sequência é uma PG com:

$$a_1 = 2, \quad q = 3.$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}.$$

(b)

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1}.$$

$$S_6 = \frac{2(3^6 - 1)}{2}.$$

$$\boxed{S_6 = 728}.$$

6. Sequência de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.$$

Logo:

$$\boxed{F_{10} = 55}.$$

Coroação

7.

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}.$$

Queremos:

$$6 \cdot 2^{n-1} > 1000.$$

$$2^{n-1} > \frac{1000}{6}.$$

Como:

$$2^7 = 128 \quad \text{e} \quad 2^8 = 256,$$

segue:

$$n - 1 = 8.$$

Logo:

$$\boxed{n = 9}.$$

8. A sequência é:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.$$

Logo:

$$\boxed{a_8 = 34}.$$

Capítulo 23

Fundamentos

1.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{60}.$$

2. A unidade deve ser par:

$$0, 2, 4.$$

Casos:

- final 0:

$$5 \cdot 6 \cdot 1 = 30;$$

- final 2:

$$5 \cdot 6 \cdot 1 = 30;$$

- final 4:

$$5 \cdot 6 \cdot 1 = 30.$$

Logo:

$$30 + 30 + 30 = \boxed{90}.$$

3.

$$6! = \boxed{720}.$$

4. Permutação circular:

$$(6 - 1)! = 5! = \boxed{120}.$$

5. Total de bolas:

5.

Favoráveis:

2.

Logo:

$$P = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

6.

$$a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = \boxed{32}.$$

7.

$$a_8 = 2 \cdot 2^7 = \boxed{256}.$$

Aplicação

8. Para cada posição:

3

possibilidades.

Logo:

$$3^4 = \boxed{81}.$$

9. Primeiro dígito:

9

opções.

Demais:

10

opções cada.

Logo:

$$9 \cdot 10^4 = \boxed{90000}.$$

10.

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = \boxed{45}.$$

11.

$$12 \cdot 11 = \boxed{132}.$$

12. Total:

$$2^3 = 8.$$

Favoráveis:

3.

Logo:

$$P = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

13. Casos favoráveis:

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).$$

Total:

36.

Logo:

$$P = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

14.

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot 3 + 19r].$$

$$210 = 10(6 + 19r).$$

$$21 = 6 + 19r.$$

$$19r = 15.$$

$$\boxed{r = \frac{15}{19}}.$$

15.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

$$S_6 = \frac{3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

$$S_6 = 6 \left(1 - \frac{1}{64}\right).$$

$$\boxed{S_6 = \frac{189}{32}}.$$

Domínio

16. A palavra **MATEMATICA** possui:

10 letras,

com repetições:

$$M : 2, \quad A : 3, \quad T : 2.$$

Logo:

$$\frac{10!}{2! 3! 2!} = \frac{3628800}{24} = \boxed{151200}.$$

17. A palavra **ARARA** possui:

5 letras,

com repetições:

$$A : 3, \quad R : 2.$$

Logo:

$$\frac{5!}{3! 2!} = \frac{120}{12} = \boxed{10}.$$

18. Na primeira retirada há:

5 boas em 8.

Retirada uma peça boa, restam:

4 boas em 7.

Logo:

$$P = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \boxed{\frac{5}{14}}.$$

19. Os pares com soma 7 são:

$$\{1, 6\}, \quad \{2, 5\}, \quad \{3, 4\}.$$

Total de pares possíveis:

$$\binom{6}{2} = 15.$$

Logo:

$$P = \frac{3}{15} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

20. Dividindo os termos:

$$\frac{a_6}{a_3} = q^3.$$

$$\frac{96}{12} = 8 \Rightarrow q^3 = 8.$$

Logo:

$$q = 2.$$

Como:

$$a_3 = a_1 q^2,$$

temos:

$$12 = 4a_1.$$

Assim:

$$\boxed{q = 2, \quad a_1 = 3}.$$

21. Subtraindo os termos:

$$a_{12} - a_4 = 8r.$$

$$35 - 11 = 24 \Rightarrow 8r = 24.$$

Logo:

$$r = 3.$$

Como:

$$a_4 = a_1 + 3r,$$

temos:

$$11 = a_1 + 9.$$

Assim:

$$\boxed{a_1 = 2, \quad r = 3}.$$

Coroação

22. Calculando os primeiros termos:

$$1, 3, 7, 15, 31, \dots$$

Cada termo é uma unidade menor que uma potência de 2:

$$1 = 2^1 - 1, \quad 3 = 2^2 - 1, \quad 7 = 2^3 - 1.$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}.$$

De fato, se:

$$a_n = 2^n - 1,$$

então:

$$a_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

23. Calculando os primeiros termos:

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \quad b_3 = \frac{2}{5}, \quad b_4 = \frac{2}{7}.$$

Os numeradores são constantes e os denominadores são os ímpares.

Conjectura:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{2n-1}}.$$

Base: para $n = 1$,

$$\frac{2}{2(1)-1} = 2 = b_1.$$

Passo: suponha que:

$$b_n = \frac{2}{2n-1}.$$

Então:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{b_n}{1 + b_n} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{1 + \frac{2}{2n-1}} \\ &= \frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{2n+1}{2n-1}} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Como:

$$2n+1 = 2(n+1) - 1,$$

a fórmula vale para $n+1$.

Pelo princípio da indução, a conjectura está provada.

24. Para ir do canto inferior esquerdo ao superior direito, todo caminho mínimo usa:

3 passos à direita e 3 passos para cima.

São 6 passos ao todo, e basta escolher quais deles são para a direita:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = \boxed{20}.$$

25. Escolhemos 2 ases entre os 4 e 3 cartas entre as 48 restantes:

$$\binom{4}{2} \binom{48}{3} = 6 \cdot 17296 = 103776.$$

O total de mãos é:

$$\binom{52}{5} = 2598960.$$

Logo:

$$P = \frac{103776}{2598960} = \boxed{\frac{2162}{54145} \approx 0,04}.$$

Capítulo 24

Fundamentos

1. (a)

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

$$y = 3.$$

Logo:

$$\boxed{(x, y) = (5, 3)}.$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Somando:

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

$$y = 1.$$

Logo:

$$\boxed{(x, y) = (3, 1)}.$$

(c)

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Somando:

$$4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

$$y = 1.$$

Logo:

$$\boxed{(x, y) = (3, 1)}.$$

(d)

$$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$y = 7 - x.$$

Substituindo:

$$5x - 2(7 - x) = 11.$$

$$7x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{7}.$$

$$\boxed{x = \frac{25}{7}, \quad y = \frac{24}{7}}.$$

2. (a)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

SPI.

(b)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

SI.

(c)

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

SPI.

3. (a)

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$y = 9 - x.$$

$$2x - (9 - x) = 6.$$

$$3x = 15 \Rightarrow x = 5.$$

$$\boxed{x = 5, \quad y = 4}.$$

(b)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$x = y + 1.$$

$$3(y + 1) + 2y = 14.$$

$$5y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{5}.$$

$$\boxed{x = \frac{16}{5}, \quad y = \frac{11}{5}}.$$

4. (a)

$$\begin{cases} 4x + y = 13 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Somando:

$$6x = 18 \Rightarrow x = 3.$$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 1}.$$

(b)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 20 \end{cases}$$

Somando:

$$8x = 32 \Rightarrow x = 4.$$

$$\boxed{x = 4, \quad y = 0}.$$

5.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

O sistema será impossível quando:

$$\boxed{k \neq 4}.$$

Aplicação

6. Seja:

h = hambúrguer, r = refrigerante.

$$\begin{cases} 2h + r = 31 \\ h + 2r = 23 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda por 2:

$$2h + 4r = 46.$$

Subtraindo:

$$3r = 15 \Rightarrow r = 5.$$

$$h = 13.$$

Logo:

hambúrguer = R\$ 13, refrigerante = R\$ 5.

7.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras:

$$2y = 4 \Rightarrow y = 2.$$

Então:

$$x + z = 7.$$

Na terceira:

$$2x - z = 2.$$

Somando:

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

$$z = 4.$$

Logo:

$(x, y, z) = (3, 2, 4)$.

8. Sejam:

$$c = \text{carros}, \quad m = \text{motos}.$$

$$\begin{cases} c + m = 30 \\ 4c + 2m = 94 \end{cases}$$

Dividindo a segunda por 2:

$$2c + m = 47.$$

Subtraindo:

$$c = 17.$$

$c = 17$ carros, $m = 13$ motos.

9.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 12 \end{cases}$$

Da primeira:

$$y = 7 - 2x + z.$$

Substituindo:

$$x - 2(7 - 2x + z) + 3z = 1.$$

$$5x + z = 15.$$

Na terceira:

$$3x + 7 - 2x + z + 2z = 12.$$

$$x + 3z = 5.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 5x + z = 15 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$

obtemos:

$x = \frac{20}{7}, \quad y = 2, \quad z = \frac{5}{7}.$

Domínio

10.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

- se $k = 2$: SPI;
- se $k \neq 2$: SI.

11.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras:

$$3x + y = 4.$$

Substituindo na terceira:

$$4 + 2z = 10 \Rightarrow z = 3.$$

Então:

$$x + 2y = 6,$$

$$2x - y = -2.$$

Resolvendo:

$$\boxed{x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{14}{5}, \quad z = 3}.$$

12. O sistema será SPI quando:

$$\boxed{k = 4}.$$

13.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$$

Da primeira:

$$y = 4 - x - z.$$

Substituindo:

$$3x + 4z = 13,$$

$$x - 3z = 0.$$

Logo:

$$x = 3z.$$

$$9z + 4z = 13 \Rightarrow z = 1.$$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1}.$$

Coroação

14. A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

O determinante é:

$$(k - 1)^2.$$

Há solução única quando:

$$\boxed{k \neq 1}.$$

15.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 4z = 15 \\ x + 4y + 16z = 45 \end{cases}$$

Subtraindo:

$$y + 3z = 9,$$

$$2y + 12z = 30.$$

Da segunda:

$$y + 6z = 15.$$

Subtraindo:

$$3z = 6 \Rightarrow z = 2.$$

$$y = 3.$$

$$\boxed{x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2}.$$

16. Multiplicando a primeira por 3:

$$3x + 3y + 3z = 3.$$

Subtraindo a terceira:

$$y = 0.$$

Logo:

$$x + z = 1.$$

Com isso, a segunda equação fica:

$$2(x + z) = 2,$$

que é verdadeira qualquer que seja a .

Portanto, o sistema possui infinitas soluções para:

$$\boxed{a \in \mathbb{R}}.$$

17. Seja o primeiro número:

$$x.$$

Então:

$$x + 4$$

e:

$$2x - (x + 4) = x - 4.$$

Logo:

$$x + (x + 4) + (x - 4) = 26.$$

$$3x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{3}.$$

Os números são:

$$\boxed{\frac{26}{3}, \quad \frac{38}{3}, \quad \frac{14}{3}}.$$

18. Subtraindo o dobro da primeira da segunda:

$$(2x + 3y + 5z) - 2(x + y + z) = 7 - 4.$$

$$y + 3z = 3.$$

Agora observe que:

$$x + 2y + 4z = (x + y + z) + (y + 3z).$$

Logo:

$$x + 2y + 4z = 2 + 3.$$

$$\boxed{x + 2y + 4z = 5}.$$

Capítulo 25

Fundamentos

1. (a) A matriz possui:

2 linhas e 2 colunas.

Ordem:

$$\boxed{2 \times 2}.$$

(b) A matriz possui:

1 linha e 3 colunas.

Ordem:

$$\boxed{1 \times 3}.$$

(c) A matriz possui:

3 linhas e 1 coluna.

Ordem:

$$\boxed{3 \times 1}.$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a)

$$a_{12} = \boxed{7}.$$

(b)

$$a_{21} = \boxed{5}.$$

(c)

$$a_{23} = \boxed{4}.$$

3. Igualando os elementos correspondentes:

$$\boxed{x = 1, \quad y = 5}.$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}}$$

5.

$$2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}}$$

Aplicação

6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}}$$

7. O produto existe, pois:

$$(2 \times 3) \cdot (3 \times 2).$$

A matriz resultante terá ordem:

$$\boxed{2 \times 2}.$$

8.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$(A + B)^T = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}$$

9.

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Domínio

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}$$

11.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como:

$$AB \neq BA,$$

as matrizes não comutam.

12.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}}$$

13. A matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

multiplica todas as coordenadas por 3.

Geometricamente, representa uma ampliação de razão 3.

Coroação

14. Seja:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Temos:

$$AX = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+c & 3b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ 3a+c=7 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{9}{5}, \quad c = \frac{8}{5}.$$

E:

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+d=2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{4}{5}, \quad d = -\frac{2}{5}.$$

Assim:

$$X = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}$$

15.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^3 = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^4 = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}$$

Os números de Fibonacci aparecem nas entradas das matrizes.

16. Se $A = (a_{ij})$, então $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Consequentemente,

$$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = a_{ij}.$$

Como as entradas correspondentes são iguais,

$$(A^T)^T = A.$$

17. Temos:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Para:

$$A = A^T,$$

devemos ter:

$$\boxed{b = c}.$$

Os valores de a e d podem ser quaisquer reais.

Capítulo 26

Fundamentos

1. (a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = \boxed{1}.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 = \boxed{-14}.$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = \boxed{10}.$$

2. Pela Regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)(0) + 1(2)(1) + 3(0)(4)$$

$$- [3(-1)(1) + 2(2)(4) + 1(0)(0)].$$

$$= 0 + 2 + 0 - (-3 + 16 + 0).$$

$$= 2 - 13 = \boxed{-11}.$$

3.

$$\det(A) = x^2 - 36.$$

Queremos:

$$x^2 - 36 = 0.$$

$$\boxed{x = \pm 6}.$$

4. Se uma matriz possui duas linhas iguais, então:

$$\det(A) = 0.$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Aplicação

5. A área é o módulo do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$= |20 - 2| = \boxed{18}.$$

6. Matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0.$$

Logo, o sistema não possui solução única.

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando Sarrus:

$$4 + 6 + 12 - (12 + 6 + 4) = 0.$$

Logo, os pontos estão alinhados.

Domínio

8. (a) Para matriz 2×2 :

$$\det(5A) = 5^2 \det(A).$$

$$= 25(-3) = \boxed{-75}.$$

(b)

$$\det(A^T) = \det(A) = \boxed{-3}.$$

9. O determinante é o produto da diagonal principal:

$$(-2) \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-5) = \boxed{30}.$$

10.

$$\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos x \end{vmatrix} = \sin x \cos x - \frac{1}{2}.$$

Logo:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}.$$

Usando:

$$2 \sin x \cos x = \sin(2x),$$

temos:

$$\sin(2x) = 1.$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

No intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}}.$$

Coroação

11. Expandindo pela segunda linha:

$$\det(A) = 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Expandindo pela segunda coluna:

$$= 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$= 10(4 - 3) = \boxed{10}.$$

12. Se:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

então:

$$\det(A) = ad - bc.$$

E:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\det(A^T) = ad - cb = ad - bc.$$

Portanto:

$$\det(A) = \det(A^T).$$

13. Multiplicar uma linha por k multiplica o determinante por k .

Como uma matriz $n \times n$ possui n linhas, ao multiplicarmos toda a matriz por k , cada linha é multiplicada por k .

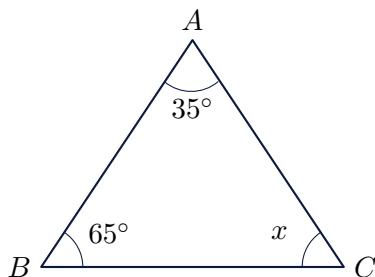
Assim, o determinante é multiplicado n vezes por k :

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

Capítulo 27

Fundamentos

1.



Resolução

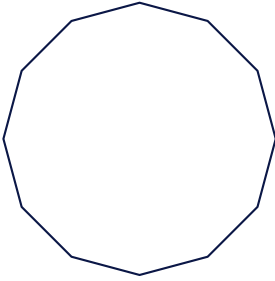
A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° .

$$35^\circ + 65^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 100^\circ$$

$x = 80^\circ$

2.



12 lados

Resolução

Utilizamos a fórmula da soma dos ângulos internos:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Como $n = 12$,

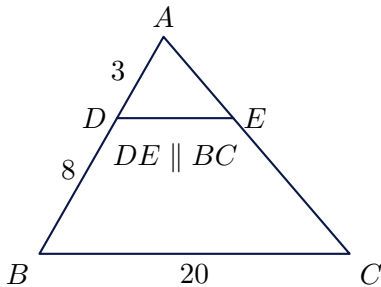
$$S = (12 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 10 \cdot 180^\circ$$

$$\boxed{S = 1800^\circ}$$

Aplicação

3.

**Resolução**

Como $DE \parallel BC$, os triângulos são semelhantes.

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

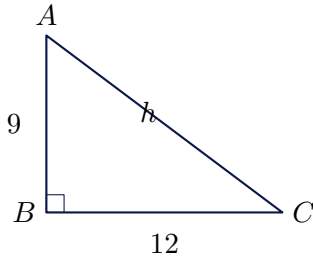
Logo,

$$\frac{DE}{20} = \frac{3}{8}$$

$$DE = \frac{3}{8} \cdot 20$$

$$\boxed{DE = \frac{15}{2}}$$

4.



Resolução

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$h^2 = 9^2 + 12^2$$

$$h^2 = 81 + 144 = 225$$

$$h = 15$$

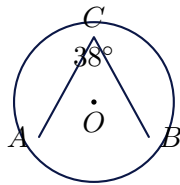
A área vale

$$A = \frac{9 \cdot 12}{2}$$

$$A = 54$$

Domínio

5.



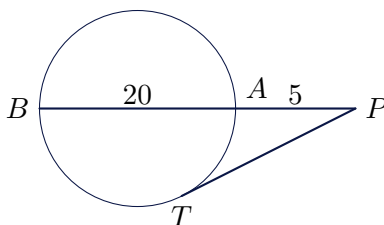
Resolução

O arco mede o dobro do ângulo inscrito.

$$\text{Arco} = 2 \cdot 38^\circ$$

$$\text{Arco} = 76^\circ$$

6.



Resolução

Pela potência do ponto,

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

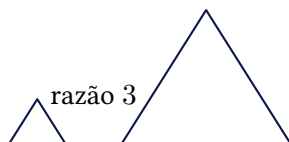
$$PT^2 = 5 \cdot 20$$

$$PT^2 = 100$$

$$PT = 10$$

Coroação

7.



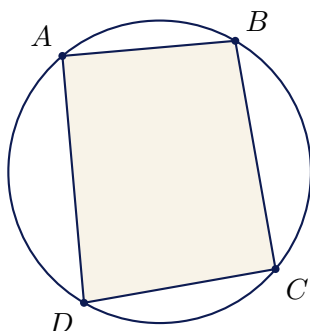
Resolução

A razão entre áreas é o quadrado da razão de semelhança.

$$\frac{A_2}{A_1} = 3^2$$

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = 9}$$

8.



Resolução

O ângulo A intercepta o arco BCD , enquanto o ângulo C intercepta o arco DAB . Pelo teorema do ângulo inscrito,

$$m(\angle A) = \frac{1}{2}m(\widehat{BCD}),$$

$$m(\angle C) = \frac{1}{2}m(\widehat{DAB}).$$

Esses dois arcos formam a circunferência inteira e, portanto, somam 360° . Logo,

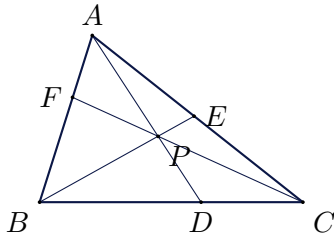
$$\boxed{m(\angle A) + m(\angle C) = 180^\circ}.$$

Do mesmo modo,

$$\boxed{m(\angle B) + m(\angle D) = 180^\circ}.$$

Logo, em qualquer quadrilátero inscrito, os ângulos opostos são suplementares.

9.



Resolução

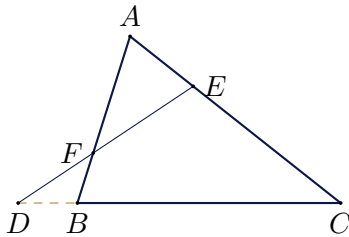
Pelo Teorema de Ceva,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Logo,

$$\boxed{\frac{AF}{FB} = \frac{15}{8}}.$$

10.



Resolução

Com comprimentos positivos, Menelau fornece

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

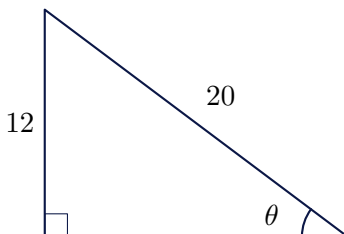
Portanto,

$$\boxed{\frac{AF}{FB} = \frac{5}{6}}.$$

Capítulo 28

Fundamentos

1.



Resolução

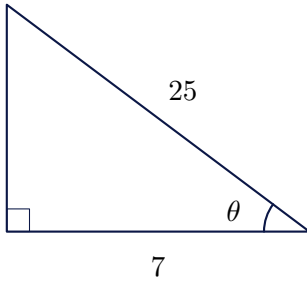
Pela definição de seno,

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{12}{20}$$

$$\boxed{\text{sen } \theta = \frac{3}{5}}$$

2.

**Resolução**

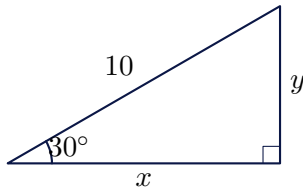
Pela definição de cosseno,

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{7}{25}$$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{7}{25}}$$

3.

**Resolução**O cateto oposto a 30° mede

$$y = 10 \operatorname{sen} 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

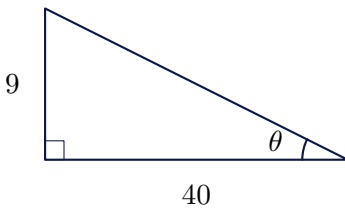
O cateto adjacente mede

$$x = 10 \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

$$\boxed{x = 5\sqrt{3} \quad \text{e} \quad y = 5}$$

Aplicação

4.

**Resolução**

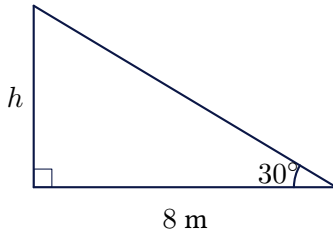
A tangente é dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{9}{40}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{9}{40}}$$

5.

**Resolução**

Pela definição de tangente,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{8}$$

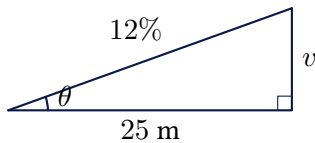
Multiplicando ambos os lados por 8,

$$h = 8 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\text{Como } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

6.

**Resolução**

Como $12\% = 0,12$,

$$\frac{v}{25} = 0,12 \implies v = 3.$$

Portanto, $v = 3 \text{ m}$. Além disso,

$$\operatorname{tg} \theta = 0,12,$$

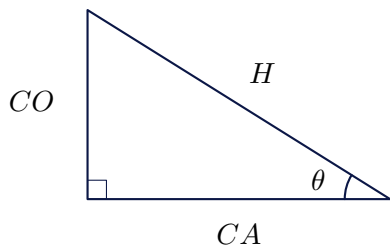
de modo que

$$\theta = \operatorname{arctg}(0,12) \approx 6,84^\circ.$$

Logo, $\theta \approx 6,84^\circ$.

Domínio

7.



Resolução

Pelas definições,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{CO}{H}, \quad \cos \theta = \frac{CA}{H}.$$

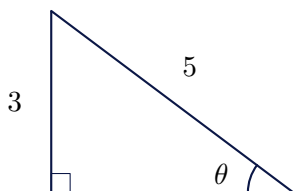
Logo,

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{CO/H}{CA/H} = \frac{CO}{CA}.$$

Como $\operatorname{tg} \theta = CO/CA$, concluímos que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}.$$

8.



Resolução

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{25 - 9} = 4. \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

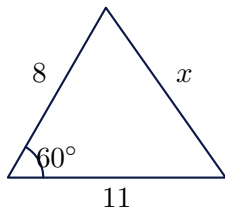
e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$$

9.

**Resolução**

Pela Lei dos Cossenos,

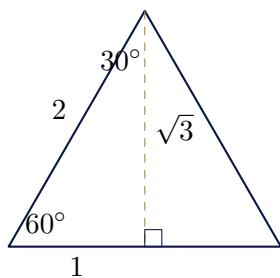
$$x^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cos 60^\circ.$$

Como $\cos 60^\circ = 1/2$,

$$x^2 = 64 + 121 - 88 = 97.$$

Portanto, $\boxed{x = \sqrt{97}}.$ **Coroação**

10.

**Resolução**

A altura divide o equilátero em dois triângulos retângulos. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}.$$

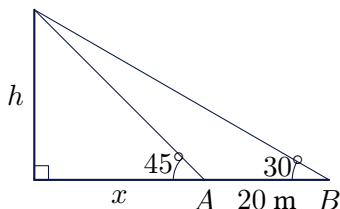
Para o ângulo de 30° ,

$$\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}},$$

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

11.

**Resolução**Do ponto A ,

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x.$$

Do ponto B ,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x + 20}.$$

Substituindo $h = x$,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 20},$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = 20.$$

Portanto,

$$\boxed{h = x = 10(\sqrt{3} + 1) \text{ m}}.$$

12. Pela Lei dos Senos,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} 45^\circ}.$$

Logo,

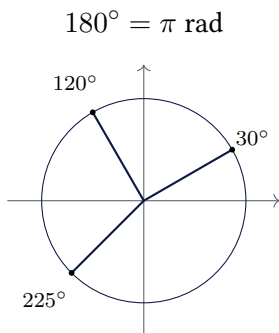
$$b = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2} = 3\sqrt{6}.$$

Portanto, $\boxed{b = 3\sqrt{6}}.$

Capítulo 29

Fundamentos

1.



Usando

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{graus}} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

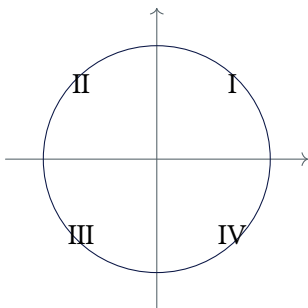
$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}}$$

2.

**Resolução**

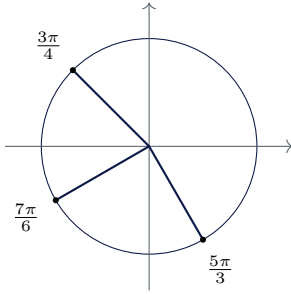
$$\frac{2\pi}{3} \in \boxed{\text{II}}$$

$$-\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in \boxed{\text{III}}$$

$$\frac{11\pi}{6} \in \boxed{\text{IV}}$$

Aplicação

3.



Resolução

Valores notáveis:

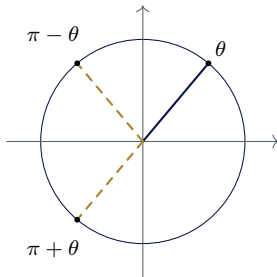
$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4.

$$\theta \longrightarrow \theta + 2\pi$$



Resolução

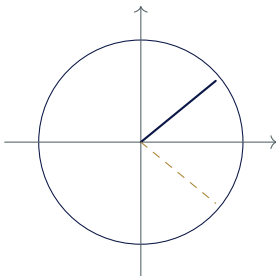
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \boxed{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \boxed{-\cos \theta}$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \theta) = \boxed{\operatorname{tg} \theta}$$

Domínio

5.



Resolução

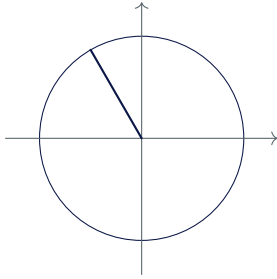
No ciclo trigonométrico,

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

pois a ordenada troca de sinal.
Já a abscissa permanece igual:

$$\cos(-\theta) = \cos \theta.$$

6.



Resolução

Pela identidade fundamental,

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Como θ está no segundo quadrante,

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

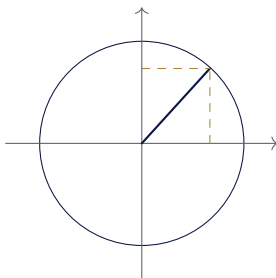
Então,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$$

Coroação

7.



Resolução

Na circunferência unitária,

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta.$$

Como

$$x^2 + y^2 = 1,$$

segue que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

8.

Resolução

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

Fazendo

$$u = \operatorname{sen} x,$$

temos

$$2u^2 - 3u + 1 = 0.$$

$$(2u - 1)(u - 1) = 0.$$

Logo,

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} x = 1.$$

Assim,

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

9.

Resolução

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)}$$

Substituindo as propriedades,

$$= \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

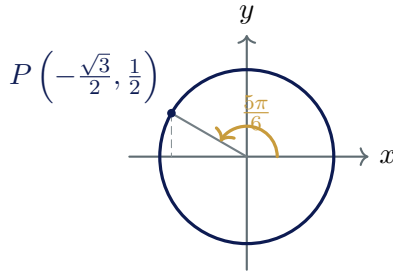
$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}(\theta)$$

10. Reduzindo os arcos por voltas completas,

$$\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad -\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo, ambos terminam no mesmo ponto do segundo quadrante. Como o arco de referência é $\frac{\pi}{6}$,

$$P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$



11. Como P pertence ao ciclo,

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Substituindo $x = -\frac{3}{5}$,

$$\frac{9}{25} + y^2 = 1 \implies y^2 = \frac{16}{25}.$$

No segundo quadrante, a ordenada é positiva; portanto, $y = \frac{4}{5}$. Assim,

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3}.$$

12. Para o primeiro arco,

$$\frac{23\pi}{4} - 4\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

Ele está no quarto quadrante e tem referência $\frac{\pi}{4}$; logo,

$$\sin \left(\frac{23\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para o segundo,

$$-\frac{17\pi}{3} + 6\pi = \frac{\pi}{3}.$$

O arco cômruo já está no primeiro quadrante e é sua própria referência. Portanto,

$$\cos \left(-\frac{17\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por fim, usando o período π da tangente,

$$\frac{29\pi}{6} - 4\pi = \frac{5\pi}{6}.$$

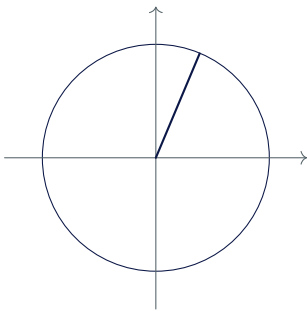
Esse arco está no segundo quadrante e tem referência $\frac{\pi}{6}$. Assim,

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{29\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Capítulo 30

Fundamentos

1.



Resolução

Pela identidade fundamental,

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

Substituindo $\cos \theta = \frac{5}{13}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta &= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}. \end{aligned}$$

Como θ pertence ao primeiro quadrante,

$$\boxed{\operatorname{sen} \theta = \frac{12}{13}}.$$

2.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

Resolução

Partindo da identidade

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

dividimos todos os termos por $\cos^2 \theta$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Como

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta,$$

segue que

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Aplicação

3.

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

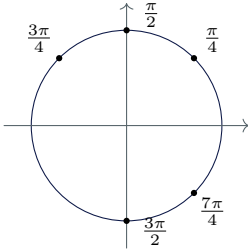
Resolução

Utilizando as fórmulas da soma e diferença,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

4.

**Resolução**No intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Domínio

5.

$$\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

Temos

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

6.

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \theta$$

Como

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B,$$

temos

$$A = B + 2k\pi$$

ou

$$A = \pi - B + 2k\pi.$$

Assim,

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \pi - \theta + 2k\pi.$$

Logo,

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Coroação

7.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Como

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

temos

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x.$$

Isolando $\operatorname{sen}^2 x$,

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

8.

Resolução

$$2 \operatorname{sen}(x + \pi) = \sqrt{3}$$

Dividindo por 2,

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x,$$

temos

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

No intervalo $[0, 2\pi]$,

$$x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

9. Pelas fórmulas de soma e diferença,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Somando membro a membro, os termos $\cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ se cancelam. Portanto,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta.$$

10. Temos

$$\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

No ciclo,

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Assim,

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Selecionando os valores no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Capítulo 31

Geometria Plana

Fundamentos

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

$$35^\circ + 65^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 100^\circ$$

Resposta: $x = 80^\circ$

2. Para um polígono convexo de $n = 15$ lados, usamos a fórmula $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

$$S = (15 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 13 \cdot 180^\circ$$

Resposta: $S = 2340^\circ$

3. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por $D = \frac{n(n-3)}{2}$.
Como $n = 20$:

$$D = \frac{20(20 - 3)}{2}$$

$$D = \frac{20 \cdot 17}{2}$$

Resposta: $D = 170$

4. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base possuem a mesma medida ($40^\circ + x + x = 180^\circ$).

$$40^\circ + 2x = 180^\circ$$

$$2x = 140^\circ \implies x = 70^\circ$$

Resposta: 70° e 70°

5. Em um paralelogramo, ângulos opostos são iguais e ângulos consecutivos são suplementares ($\alpha + \beta = 180^\circ$). Se um ângulo mede 68° , então os ângulos adjacentes medem:

$$180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

O ângulo oposto ao ângulo dado também mede 68° .

$112^\circ, 68^\circ, 112^\circ$

6. Em um trapézio, os ângulos internos situados no mesmo lado de uma transversal são suplementares ($\alpha + \beta = 180^\circ$).

$$70^\circ + x = 180^\circ \implies x = 110^\circ$$

Como o trapézio é isósceles, os ângulos da base menor são iguais. **Resposta:**

$$\boxed{110^\circ \text{ e } 110^\circ}$$

Aplicação

7. Pelo Teorema de Pitágoras ($h^2 = 9^2 + 12^2$):

$$h^2 = 81 + 144 = 225 \implies h = 15$$

A área do triângulo retângulo é:

$$A = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$$

Resposta: $\boxed{h = 15}$ e $\boxed{A = 54}$

8. Aplicando o Teorema de Pitágoras ($26^2 = 10^2 + x^2$):

$$676 = 100 + x^2$$

$$x^2 = 576 \implies x = 24$$

Resposta: $\boxed{24}$

9. Como $DE \parallel BC$, os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{4}{10} = \frac{DE}{15}$$

$$DE = \frac{4 \cdot 15}{10}$$

Resposta: $\boxed{DE = 6}$

10. Pelo Teorema da Bissetriz Interna ($\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$):

$$\frac{BD}{DC} = \frac{8}{12}$$

Simplificando a razão:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$$

Resposta: $\boxed{BD : DC = 2 : 3}$

11. A área de um losango é dada por $A = \frac{D \cdot d}{2}$. Substituindo $A = 96$ e uma diagonal igual a 12:

$$96 = \frac{12 \cdot d}{2}$$

$$96 = 6d \implies d = 16$$

Resposta: 16

12. A área do trapézio é dada por $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

$$A = \frac{(18 + 10) \cdot 7}{2}$$

$$A = \frac{28 \cdot 7}{2} = 98$$

Resposta: $A = 98$

Domínio

13. A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente ($\alpha_{\text{inscrito}} = \frac{\alpha_{\text{arco}}}{2}$).

$$38^\circ = \frac{x}{2} \implies x = 76^\circ$$

Resposta: 76°

14. Pelo Teorema da Tangente e da Secante ($PT^2 = PA \cdot PB$):

$$PT^2 = 5 \cdot 20 = 100$$

Como um comprimento é positivo: **Resposta:** $PT = 10$

15. Considere um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência. O ângulo A mede a metade do arco $\widehat{BCD}$, enquanto o ângulo oposto C mede a metade do arco complementar $\widehat{DAB}$. Como os dois arcos completam a circunferência:

$$m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{DAB}) = 360^\circ$$

Portanto:

$$m(\angle A) + m(\angle C) = \frac{360^\circ}{2}$$

Resposta:

$$\boxed{m(\angle A) + m(\angle C) = 180^\circ}$$

e, analogamente,

$$\boxed{m(\angle B) + m(\angle D) = 180^\circ}.$$

16. A hipotenusa mede $c = 4 + 9 = 13$. Pelas relações métricas no triângulo retângulo:

$$a^2 = c \cdot 4 \implies a^2 = 13 \cdot 4 = 52 \implies a = 2\sqrt{13}$$

$$b^2 = c \cdot 9 \implies b^2 = 13 \cdot 9 = 117 \implies b = 3\sqrt{13}$$

Resposta: $2\sqrt{13}$ e $3\sqrt{13}$

17. Em triângulos semelhantes, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança ($\frac{A_1}{A_2} = k^2$). Como $k = 3$:

$$\frac{A_1}{A_2} = 3^2 = 9$$

Resposta: $9 : 1$

Coroação

18. As cordas BC e AH cortam-se em D . Os triângulos ABD e CHD são semelhantes: $\widehat{ADB} = \widehat{CDH}$ (opostos pelo vértice) e $\widehat{BAD} = \widehat{HCD}$ (ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco BH). Logo, $\triangle ABD \sim \triangle CHD$, de onde

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{HD}$$

Multiplicando em cruz: **Resposta:** $BD \cdot DC = AD \cdot DH$

19. Como os triângulos ADE e ABC possuem o mesmo ângulo em A :

$$\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$$

Da razão $AD : DB = 2 : 1$, temos $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$. Da razão $AE : EC = 3 : 1$, temos $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $[ADE] : [ABC] = 1 : 2$

Trigonometria

Fundamentos

20. Pela definição de seno ($\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$):

$$\text{sen } \theta = \frac{12}{20}$$

Resposta: $\boxed{\sin \theta = \frac{3}{5}}$

21. Pela definição de cosseno ($\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$): **Resposta:** $\boxed{\cos \theta = \frac{7}{25}}$

22. Pela definição de tangente ($\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$): O ângulo considerado é oposto ao cateto de medida 9. Assim, o cateto adjacente mede 40. **Resposta:** $\boxed{\text{tg } \theta = \frac{9}{40}}$

23. Para converter graus em radianos ($180^\circ = \pi \text{ rad}$), multiplicamos por $\frac{\pi}{180^\circ}$.

$$30^\circ = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$135^\circ = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

$$300^\circ = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

Resposta: $\boxed{30^\circ = \frac{\pi}{6}}, \boxed{135^\circ = \frac{3\pi}{4}}, \boxed{300^\circ = \frac{5\pi}{3}}$

24. Determinando os quadrantes:

- Temos $\frac{5\pi}{6}$ entre $\frac{\pi}{2}$ e π . Logo, $\frac{5\pi}{6}$ **está no segundo quadrante.**
- Como $-\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, então $-\frac{3\pi}{4}$ **está no terceiro quadrante.**
- Além disso, $\frac{11\pi}{6}$ está entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π . Portanto, $\frac{11\pi}{6}$ **está no quarto quadrante.**

Aplicação

25. Usando os valores notáveis no ciclo trigonométrico:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

26. Pela periodicidade e redução de quadrantes:

$$\boxed{\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta}$$

Como $\pi - \theta$ pertence ao segundo quadrante e o cosseno é negativo nesse quadrante:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

A tangente possui período π :

$$\operatorname{tg}(\pi + \theta) = \operatorname{tg} \theta$$

27. Pela identidade fundamental ($\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$), sabendo que $\sin \theta = \frac{3}{5}$:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \implies \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

Como θ é agudo, $\cos \theta = \frac{4}{5}$. Assim, $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$. **Resposta:**

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \text{ e } \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$$

28. Pela fórmula do seno da soma ($75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$):

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Resposta: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

29. Pela fórmula do cosseno da diferença ($15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$):

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Resposta: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Domínio

30. No intervalo $[0, 2\pi]$, o seno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ no primeiro e no segundo quadrantes.
 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

31. No intervalo $[0, 2\pi]$, o cosseno se anula nos pontos do eixo vertical. $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

32. A tangente é negativa no segundo e no quarto quadrantes ($\text{tg } \theta = -1$). No intervalo $[0, 2\pi]$, $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Resposta: $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

33. Dada a equação $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$, temos $\sin \theta = \pm \frac{1}{2}$. Em uma volta, isso ocorre em $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$. Reunindo as soluções em duas famílias, obtemos

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

34. Dada a equação $\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$, temos $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Esses valores ocorrem nos mesmos quatro ângulos de referência de uma volta. Assim,

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Coroação

35. Para resolver $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \theta$: Se $\sin A = \sin B$, então $A = B + 2k\pi$ ou $A = \pi - B + 2k\pi$. A primeira possibilidade não fornece solução, pois resultaria em $\frac{\pi}{3} = 2k\pi$. Na segunda possibilidade:

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \pi - \theta + 2k\pi$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

36. Para resolver

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2},$$

usamos a identidade

$$\operatorname{sen} \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \implies \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Logo, $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

37. Pela identidade fundamental, $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$. Substituindo na fórmula do cosseno do arco duplo ($\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$):

$$\cos 2\theta = (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta$$

Resposta: $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$

Problemas integradores (Geo + Trig)

Aplicação

38. No triângulo retângulo formado pelo poste e pela sombra:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{8} \implies h = 8 \operatorname{tg} 30^\circ$$

Como $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos $h = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resposta: $h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ m}$

39. A escada é a hipotenusa do triângulo retângulo, enquanto a altura alcançada é o cateto oposto ao ângulo de 60° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{5} \implies h = 5 \operatorname{sen} 60^\circ$$

Como $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

Resposta: $h = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ m}$

40. Como $\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{3}{4}$, podemos considerar os catetos iguais a 3 e 4. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 4^2 \implies h^2 = 25 \implies h = 5$$

Logo, $\sin \theta = \frac{3}{5}$ e $\cos \theta = \frac{4}{5}$.

Resposta: $\boxed{\sin \theta = \frac{3}{5} \text{ e } \cos \theta = \frac{4}{5}}$

Domínio

41. Pela fórmula do cosseno do arco duplo ($\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$): Tomando $\theta = 20^\circ$, temos $\cos 40^\circ = 1 - 2\sin^2 20^\circ$.

$$2\sin^2 20^\circ = 1 - \cos 40^\circ \implies \sin^2 20^\circ = \frac{1 - \cos 40^\circ}{2}$$

Como 20° é um ângulo agudo:

Resposta: $\boxed{\sin 20^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 40^\circ}{2}}}$

42. O centro da circunferência está sobre a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas. Como o ângulo entre as retas é 60° , o ângulo entre a bissetriz e uma das retas é $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. No triângulo retângulo formado, o raio é o cateto oposto:

$$\sin 30^\circ = \frac{10}{d}$$

Como $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, temos $\frac{1}{2} = \frac{10}{d} \implies d = 20$.

Resposta: $\boxed{20}$

Coroação

43. A área de um triângulo pode ser escrita de três formas ($A_\Delta = \frac{bc \sin A}{2}$):

$$A_\Delta = \frac{bc \sin A}{2}, \quad A_\Delta = \frac{ca \sin B}{2}, \quad A_\Delta = \frac{ab \sin C}{2}$$

Igualando as duas primeiras expressões:

$$\frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2}$$

Simplificando, $b \sin A = a \sin B$. Logo:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

De modo análogo, conclui-se que $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Resposta: $\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$

Capítulo 32

Fundamentos

1.

Retas no espaço

Resolução

Concorrentes: possuem um ponto em comum.

Paralelas: nunca se encontram e pertencem ao mesmo plano.

Reversas: não possuem ponto em comum e não pertencem ao mesmo plano.

Concorrentes, Paralelas e Reversas

2.

Plano $\cap$ Sólido

Resolução

Uma seção plana é a figura obtida pela interseção de um plano com um sólido.

Em um prisma reto, um plano paralelo à base produz uma seção congruente à base.

Resposta. A seção plana é a interseção entre o plano de corte e o sólido.

3.

 r, π, α, β

Resolução

Exemplos:

(a) $r \parallel \pi$

(b) $r \perp \pi$

(c) $\alpha \parallel \beta$

Aplicação

4.

$$V = A_b h$$

Resolução

O volume do prisma é

$$V = A_b h.$$

Substituindo,

$$V = 30 \cdot 12.$$

$$\boxed{V = 360}$$

5.

$$A_T = 2A_b + A_L$$

Resolução

A base possui área

$$A_b = 5^2 = 25.$$

A área lateral é

$$A_L = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140.$$

Logo,

$$A_T = 2 \cdot 25 + 140.$$

$$\boxed{A_T = 190}$$

6.

$$V = \pi r^2 h$$

Resolução

Substituindo,

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10.$$

$$V = 250\pi.$$

$$\boxed{250\pi}$$

7.

$$A_L = 2\pi r h$$

Temos

Resolução

$$64\pi = 2\pi \cdot 4 \cdot h.$$

$$64 = 8h.$$

$$\boxed{h = 8}$$

8.

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

A área da base é

Resolução

$$A_b = 8^2 = 64.$$

Logo,

$$V = \frac{64 \cdot 9}{3}.$$

$$\boxed{V = 192}$$

Domínio

9.

$$A_L = P_b h$$

A área lateral do prisma é

Resolução

$$A_L = P_b h.$$

Como

$$P_b = 24,$$

temos

$$A_L = 24 \cdot 9.$$

$$\boxed{A_L = 216}$$

10.

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Resolução

Substituindo,

$$A_T = 2\pi(2)^2 + 2\pi(2)(6).$$

$$A_T = 8\pi + 24\pi.$$

$$\boxed{A_T = 32\pi}$$

11.

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Resolução

Substituindo,

$$V = \frac{18 \cdot 15}{3}.$$

$$\boxed{V = 90}$$

12.

$$V = \pi r^2 h$$

Resolução

Temos

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 20.$$

$$V = 720\pi.$$

$$\boxed{720\pi \text{ cm}^3}$$

Coroação

13.

$$V = A_b h$$

Resolução

O volume do prisma é

$$V_p = A_b h.$$

O volume do cilindro também é

$$V_c = A_b h.$$

Como possuem a mesma área da base e a mesma altura,

$$\boxed{V_p = V_c.}$$

14.

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Resolução

O volume da pirâmide é

$$V_p = \frac{A_b h}{3}.$$

O volume do cone também é

$$V_c = \frac{A_b h}{3}.$$

Assim,

$$\boxed{V_p = V_c.}$$

Capítulo 33

Fundamentos

1.

$$g^2 = r^2 + h^2$$

Resolução

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

A área lateral é

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi.$$

O volume é

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 96\pi.$$

$$g = 10$$

$$A_L = 60\pi$$

$$V = 96\pi$$

2.

$$A_L = \pi(R + r)g$$

Resolução

Aplicando a fórmula,

$$A_L = \pi(6 + 2) \cdot 5.$$

$$A_L = 40\pi.$$

$$A_L = 40\pi$$

3.

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ResoluçãoPara $r = 3$,

$$A = 4\pi(3)^2 = 36\pi.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi.$$

$$\boxed{A = 36\pi}$$

$$\boxed{V = 36\pi}$$

Aplicação

4.

$$A_L = \pi r g$$

Resolução

Substituindo,

$$60\pi = \pi \cdot 6 \cdot g.$$

$$60 = 6g.$$

$$\boxed{g = 10}$$

5.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Resolução

Temos

$$48\pi = \frac{\pi \cdot 16 \cdot h}{3}.$$

$$48 = \frac{16h}{3}.$$

$$144 = 16h.$$

$$\boxed{h = 9}$$

6.

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Resolução

Substituindo,

$$V = \frac{\pi \cdot 12}{3}(25 + 15 + 9).$$

$$V = 4\pi \cdot 49.$$

$$\boxed{V = 196\pi}$$

7.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

ResoluçãoCancelando π ,

$$\frac{4}{3}r^3 = 36.$$

$$r^3 = 27.$$

$$\boxed{r = 3}$$

Domínio

8.

$$g^2 = r^2 + h^2$$

Resolução

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

A área lateral é

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 5 \cdot 13.$$

$$\boxed{h = 12}$$

$$\boxed{A_L = 65\pi}$$

9.

$$V \propto r^3$$

Resolução

A razão entre os volumes é

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}.$$

Logo,

$1 : 27$

10.

$$V_c = \pi r^2 h$$

Resolução

Como possuem mesmo raio e mesma altura,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} V_{cilindro}.$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Portanto,

$V_{cone} : V_{cilindro} = 1 : 3$

Coroação

11.

$$n = \frac{V_{cil}}{V_{esf}}$$

Resolução

O volume do cilindro é

$$V_{cil} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi.$$

Cada esfera possui volume

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi.$$

Assim,

$$n = \frac{90\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{270}{4} = 67,5.$$

Como só podemos contar esferas inteiras, o maior número compatível com esse limite de volume é

67 esferas

Esse valor é uma estimativa superior baseada apenas nos volumes; não resolve o problema geométrico do empacotamento das esferas no cilindro.

12.

$$\frac{V_e}{V_c}$$

Resolução

Como a esfera está inscrita,

$$R_{cil} = r, \quad h = 2r.$$

Logo,

$$V_{cil} = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3.$$

O volume da esfera é

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Assim,

$$\frac{V_e}{V_{cil}} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{V_e}{V_{cil}} = \frac{2}{3}}$$

Capítulo 34

Fundamentos

1.

$$(x, y)$$

Resolução

Analisando os sinais das coordenadas:

$$(-3, 2) \rightarrow \boxed{\text{II quadrante}}$$

$$(4, -1) \rightarrow \boxed{\text{IV quadrante}}$$

$$(0, 5) \rightarrow \boxed{\text{Eixo } y}$$

$$(-2, -7) \rightarrow \boxed{\text{III quadrante}}$$

2.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Resolução

Aplicando a fórmula:

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 64}$$

$$d = \sqrt{100}$$

Logo, $\boxed{d = 10}$.

3.

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Resolução

Calculando as coordenadas do ponto médio:

$$x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

Logo, $\boxed{M(1, 2)}$.

4.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Resolução

Temos:

$$m = \frac{0 - 4}{5 - 1}$$

$$m = \frac{-4}{4}$$

Portanto, $\boxed{m = -1}$.

Aplicação

5. $y - y_0 = m(x - x_0)$

Resolução

Usando a forma ponto-coeficiente angular:

$$\begin{aligned}y + 3 &= 2(x - 0) \\y &= 2x - 3\end{aligned}$$

Logo, $\boxed{y = 2x - 3}$.

6. $m = \frac{3-1}{4-(-2)}$

Resolução

Primeiro, calculamos o coeficiente angular:

$$m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Usando o ponto $(-2, 1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

Simplificando, obtemos: $\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$.

7. $3x - 2 = -2x + 8$

Resolução

Igualando as equações das retas:

$$\begin{aligned}5x &= 10 \\x &= 2\end{aligned}$$

Substituindo o valor de x :

$$y = 3(2) - 2 = 4$$

O ponto de interseção é $\boxed{(2, 4)}$.

8.

$$m = -\frac{1}{2}$$

Resolução

Retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular. Assim:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

Desenvolvendo a equação, temos:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Domínio

9.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Resolução

Calculando os comprimentos: $AB = 4$, $AC = 3$ e $BC = 5$.

Verificando pelo Teorema de Pitágoras:

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

$$16 + 9 = 25$$

Logo, $\triangle ABC$ é retângulo.

10.

$$m_{AB} = m_{BC}$$

Resolução

O coeficiente angular de BC é:

$$m = \frac{9 - 5}{7 - 3} = 1$$

Igualando os coeficientes:

$$\frac{5 - k}{3 - 1} = 1$$

$$5 - k = 2$$

$$k = 3$$

Portanto, $k = 3$.

11.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Resolução

A reta dada possui coeficiente angular $m = 4$. Logo, a reta perpendicular possui $m = -\frac{1}{4}$.

Usando o ponto $(2, 3)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

Portanto,
$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}}.$$

Coroação

12.

$$tx + 1 = -x + 4$$

Resolução

Da igualdade, agrupamos os termos em x :

$$tx + x = 3$$

$$(t + 1)x = 3$$

$$x = \frac{3}{t + 1}$$

Substituindo na reta s , temos $y = -x + 4$.

Logo, a coordenada de interseção é:

$$\boxed{\left(\frac{3}{t + 1}, 4 - \frac{3}{t + 1}\right), \quad t \neq -1}$$

13.

$$PA = PB$$

Resolução

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B é a mediatriz do segmento.

O ponto médio é $M(3, 4)$.

O coeficiente angular de AB é $m = 1$, logo a mediatriz possui coeficiente angular $m = -1$.

Sua equação é:

$$y - 4 = -(x - 3)$$

Portanto, $\boxed{x + y = 7}$.

Capítulo 35

Fundamentos

1.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Resolução

Substituindo o centro $(-1, 4)$ e o raio 2,

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 2^2.$$

Logo,

$$\boxed{(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 4}$$

2.

Resolução

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$$

Completando quadrados,

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 4)^2 - 16 + 5 = 0.$$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 12.$$

Assim,

$$C = (-1, 4)$$

e

$$r = 2\sqrt{3}.$$

3.

Resolução

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$$

Substituindo $P(1, 2)$,

$$(1 - 3)^2 + (2 + 1)^2 = 4 + 9 = 13.$$

Como

$$13 \neq 20,$$

concluimos que

$$P \notin \text{circunferência.}$$

4.

Resolução

$$y = 0$$

Substituindo $y = 0$,

$$x^2 = 16.$$

$$x = \pm 4.$$

Logo,

$$(-4, 0) \text{ e } (4, 0).$$

Aplicação

5.

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Resolução

O centro é

$$C(4, 2).$$

O raio é metade de

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Logo,

$$r = 2\sqrt{2}.$$

Assim,

$$\boxed{(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 8.}$$

6.

$$y = 2x - 1$$

Resolução

Substituindo na circunferência,

$$x^2 + (2x - 1)^2 = 5.$$

$$5x^2 - 4x - 4 = 0.$$

O discriminante é

$$\Delta = 16 + 80 = 96.$$

As soluções são

$$x = \frac{4 \pm 4\sqrt{6}}{10} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{5}.$$

Como $y = 2x - 1$, os respectivos valores de y são

$$\frac{4\sqrt{6} - 1}{5} \quad \text{e} \quad \frac{-4\sqrt{6} - 1}{5}.$$

Logo,

$$\left(\frac{2 + 2\sqrt{6}}{5}, \frac{4\sqrt{6} - 1}{5} \right)$$

e

$$\left(\frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{-4\sqrt{6} - 1}{5} \right).$$

7.

$$y = k$$

Resolução

A reta é horizontal.

Para ser tangente,

$$|k| = r = 3.$$

Logo,

$$k = 3 \quad \text{ou} \quad k = -3.$$

8.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Resolução

Os três pontos pertencem aos eixos.
O centro é

$$C(2, 2)$$

e o raio vale

$$r = 2\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

Domínio

9.

$$PA = 5$$

Resolução

O lugar geométrico é a circunferência de centro $A(2, -1)$ e raio 5.
Assim,

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

10.

$$PA = PB$$

Resolução

O lugar geométrico é a mediatriz de AB .
Como

$$A(-2, 0), \quad B(2, 0),$$

a mediatriz é o eixo y .

Logo,

$$x = 0.$$

11.

Resolução

$$y = mx + 3$$

Escrevendo a reta na forma geral,

$$mx - y + 3 = 0.$$

Para haver tangência,

$$\frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2.$$

Elevando ao quadrado,

$$(m + 1)^2 = 4(m^2 + 1).$$

$$3m^2 - 2m + 3 = 0.$$

Como

$$\Delta = -32 < 0,$$

não existe solução real.

Não existe $m \in \mathbb{R}$.

Coroação

12.

$$x^2 + y^2 = 1$$

Resolução

Se a reta tangente passa por $(t, 0)$, sua equação é

$$y = m(x - t).$$

Impondo tangência à circunferência unitária, obtém-se

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Logo, as tangentes são

$$y = \frac{x - t}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

e

$$y = -\frac{x - t}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

13.

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Resolução

Escrevendo na forma reduzida,

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

A potência de um ponto é

$$PC^2 - r^2.$$

Como deve ser igual a 3,

$$(x - 2)^2 + y^2 - 4 = 3.$$

Assim,

$$(x - 2)^2 + y^2 = 7.$$

Capítulo 36

Fundamentos

1. Para calcular a distância entre os pontos $A(-2, 1)$ e $B(4, 5)$, utilizamos a fórmula da distância entre dois pontos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Substituindo as coordenadas:

$$d_{AB} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Fatorando $52 = 4 \times 13$, temos a distância final:

$$d_{AB} = 2\sqrt{13}$$

2. O ponto médio $M(x_m, y_m)$ é obtido pela média aritmética das coordenadas das extremidades $A(7, -3)$ e $B(-1, 9)$:

$$x_m = \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{-3 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, o ponto médio é $M(3, 3)$.

3. Utilizamos a equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde o ponto dado é $(x_0, y_0) = (3, 2)$ e o coeficiente angular é $m = -2$:

$$y - 2 = -2(x - 3)$$

$$y - 2 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 8$$

Essa é a equação reduzida da reta. (Na forma geral: $2x + y - 8 = 0$).

4. A equação reduzida da circunferência com centro $C(x_c, y_c)$ e raio R é dada por:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Substituindo $C(1, -2)$ e $R = 4$:

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

5. Para um cone reto, a geratriz g , a altura h e o raio r formam um triângulo retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$g^2 = r^2 + h^2 \implies g^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Logo, $\boxed{g = 5}$. O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(4) = \frac{1}{3}\pi(9)(4) = \boxed{12\pi}$$

6. A área de uma esfera é dada por $A = 4\pi R^2$. Igualando ao valor dado:

$$4\pi R^2 = 144\pi \implies R^2 = \frac{144}{4} = 36 \implies R = 6$$

Agora, calculamos o volume usando $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi(216) = 4 \times 72\pi = \boxed{288\pi}$$

7. (a) Distância AB entre $A(0, 0)$ e $B(6, 8)$:

$$AB = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

(b) Ponto médio M :

$$M = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+8}{2} \right) = \boxed{(3, 4)}$$

8. Vamos completar os quadrados para a equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 7 = 0$:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = 7$$

Somamos 9 e 1 em ambos os lados para completar os trinômios quadrados perfeitos:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 7 + 9 + 1$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$$

Comparando com a equação reduzida, temos o centro $\boxed{C(-3, 1)}$ e o raio

$$\boxed{r = \sqrt{17}}.$$

9. O volume do tronco de cone é dado pela fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Substituindo $R = 6$, $r = 2$ e $h = 8$:

$$V = \frac{\pi(8)}{3}(6^2 + 6(2) + 2^2) = \frac{8\pi}{3}(36 + 12 + 4)$$

$$V = \frac{8\pi}{3}(52) = \boxed{\frac{416\pi}{3}}$$

Aplicação

10. Para achar a interseção, resolvemos o sistema formado pelas equações: 1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ 2) $2x + y = 7$ Substituindo a (1) na (2):

$$2x + \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 7 \implies \frac{5}{2}x = 6 \implies x = \frac{12}{5}$$

Substituindo x de volta na (1):

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}\right) + 1 = \frac{6}{5} + 1 = \frac{11}{5}$$

Ponto de interseção: $P\left(\frac{12}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

11. Substituímos $y = -x + 4$ na equação da circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$:

$$(x-1)^2 + (-x+4-1)^2 = 5 \implies (x-1)^2 + (3-x)^2 = 5$$

Expandindo os quadrados:

$$(x^2 - 2x + 1) + (9 - 6x + x^2) = 5$$

$$2x^2 - 8x + 10 = 5 \implies 2x^2 - 8x + 5 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau por Bhaskara:

$$\Delta = (-8)^2 - 4(2)(5) = 64 - 40 = 24$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Para cada x , temos $y = 4 - x$: Se $x = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} \implies y = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ Se $x = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \implies y = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ As interseções são:

$$\boxed{\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ e } \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$$

12. Substituindo $y = k$ na circunferência $x^2 + y^2 = 16$:

$$x^2 + k^2 = 16 \implies x^2 = 16 - k^2$$

Para que a reta corte a circunferência em dois pontos distintos, a equação deve ter duas raízes reais para x , o que exige que o lado direito seja estritamente positivo:

$$16 - k^2 > 0 \implies k^2 < 16 \implies \boxed{-4 < k < 4}$$

13. O centro da circunferência é o ponto médio do diâmetro AB :

$$C = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (2, 2)$$

O raio R é a distância do centro até um dos pontos (ex: B):

$$R^2 = (6-2)^2 + (1-2)^2 = 4^2 + (-1)^2 = 16 + 1 = 17$$

A equação da circunferência é:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 17}$$

14. Uma esfera de raio $R = 5$ inscrita em um cilindro reto tangencia suas bases e sua lateral. Portanto, o cilindro tem raio da base $r = R = 5$ e altura $h = 2R = 10$. Volume da esfera: $V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$ Volume do cilindro: $V_c = \pi r^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$ A razão solicitada é:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \boxed{\frac{2}{1}}$$

15. Volume do cone: $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Volume do cilindro: $V_{\text{cil}} = \pi r^2 h$ Dividindo os volumes:

$$\frac{V_{\text{cone}}}{V_{\text{cil}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

16. O raio é a distância do centro $C(1, 1)$ ao ponto $P(4, 3)$:

$$R^2 = (4-1)^2 + (3-1)^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

A equação da circunferência é:

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13}$$

17. A reta dada $y = 3x - 2$ tem coeficiente angular $m_1 = 3$. Uma reta perpendicular a ela terá coeficiente angular $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$. Usando o ponto $(1, 5)$:

$$y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 1) \implies 3y - 15 = -x + 1 \implies \boxed{x + 3y - 16 = 0}$$

18. A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 9$. A reta r é horizontal de equação $y = 1$. Substituindo $y = 1$ na circunferência:

$$x^2 + 1^2 = 9 \implies x^2 = 8 \implies x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Observando o gráfico, A tem abscissa negativa e B positiva, logo:

$$\boxed{A(-2\sqrt{2}, 1) \quad \text{e} \quad B(2\sqrt{2}, 1)}$$

Domínio

19. Calculamos os tamanhos dos lados do triângulo através da distância entre os pontos:

$$AB = \sqrt{(6 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$AC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3 - 6)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Como $AC = BC = 5$, o triângulo possui dois lados de mesma medida. Logo, é isósceles.

20. Primeiro, encontramos o centro e o raio da circunferência completando quadrados para $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25$$

Centro $C(2, 3)$ e Raio $R = 5$. A reta é dada por $mx - y + 2 = 0$. Ela possui a propriedade de sempre passar pelo ponto fixo $(0, 2)$ quando m varia. Vamos calcular a distância de $C(2, 3)$ ao ponto $(0, 2)$:

$$d_{cp} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Como $\sqrt{5} < 5$ (o raio), o ponto fixo da reta está **dentro** da circunferência. Se uma reta passa por um ponto interno da circunferência, ela será obrigatoriamente **secante**, independentemente de sua inclinação. Portanto, **não existe valor real de m** que torne a reta tangente.

21. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ equidistantes de dois pontos A e B é a reta **mediatriz** do segmento AB . Os pontos são $A(-3, 2)$ e $B(5, 2)$. Como a ordenada é a mesma ($y = 2$), o segmento é horizontal. A mediatriz será uma reta vertical passando pelo ponto médio de AB . Ponto médio: $x_m = \frac{-3+5}{2} = 1$. Portanto, a equação do lugar geométrico é a reta vertical $\boxed{x = 1}$.

22. A área lateral de um cone reto é $A_L = \pi r g$.

$$\pi(6)g = 48\pi \implies 6g = 48 \implies g = 8$$

Para encontrar a altura h , aplicamos Pitágoras ($g^2 = r^2 + h^2$):

$$8^2 = 6^2 + h^2 \implies 64 = 36 + h^2 \implies h^2 = 28 \implies h = \sqrt{28} = \boxed{2\sqrt{7}}$$

23. O volume da esfera original é $V_O = \frac{4}{3}\pi(6)^3$. Esse volume será dividido igualmente entre 8 esferas idênticas, cujo volume de cada uma será V_m :

$$8 \cdot V_m = V_O \implies 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi(6^3)$$

Simplificando as constantes em ambos os lados:

$$8 \cdot r^3 = 216 \implies r^3 = \frac{216}{8} = 27 \implies \boxed{r = 3}$$

24. Em um tronco de cone de bases paralelas, se traçarmos a altura a partir da borda do raio menor em direção à base maior, formaremos um triângulo retângulo onde: - Hipotenusa é a geratriz $g = 5$. - Um cateto é a altura h . - O outro cateto é a diferença dos raios $R - r = 5 - 3 = 2$. Aplicando Pitágoras:

$$h^2 + (R - r)^2 = g^2 \implies h^2 + 2^2 = 5^2 \implies h^2 + 4 = 25$$

$$h^2 = 21 \implies \boxed{h = \sqrt{21}}$$

25. Aplicamos a fórmula da distância de ponto a reta: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Para a reta $3x - 4y + 5 = 0$ e ponto $C(2, -1)$:

$$d = \frac{|3(2) - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 4 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

26. Temos o sistema: 1) $x^2 + y^2 = 25$ 2) $(x - 3)^2 + y^2 = 16$ Isolando y^2 na equação 1 ($y^2 = 25 - x^2$) e substituindo na equação 2:

$$(x - 3)^2 + (25 - x^2) = 16$$

$$(x^2 - 6x + 9) + 25 - x^2 = 16$$

$$-6x + 34 = 16 \implies -6x = -18 \implies x = 3$$

Substituindo $x = 3$ de volta na equação 1:

$$3^2 + y^2 = 25 \implies 9 + y^2 = 25 \implies y^2 = 16 \implies y = \pm 4$$

Os pontos de interseção são $\boxed{(3, 4) \text{ e } (3, -4)}$.

Coroação

27. A circunferência γ tem centro $C(2, -1)$ e raio $R = \sqrt{9} = 3$. As retas do tipo $r: y = mx \implies mx - y = 0$ sempre passam pela origem $(0, 0)$. A distância do centro $C(2, -1)$ até a origem $(0, 0)$ é:

$$d = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Como a distância $\sqrt{5}$ (aproximadamente 2.23) é **menor** que o raio 3, a origem está localizada **no interior** da circunferência. Como todas as retas de $y = mx$ passam por dentro da circunferência, é impossível que qualquer uma delas a tangencie. Portanto, **não existem valores de m** que satisfaçam a tangência.

28. Se o raio é $R > 0$, a tangência aos dois eixos obriga o centro a ter a forma $(\varepsilon R, \delta R)$, com $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$. Como a circunferência passa por $(3, 4)$,

$$(3 - \varepsilon R)^2 + (4 - \delta R)^2 = R^2,$$

ou seja,

$$R^2 - (6\varepsilon + 8\delta)R + 25 = 0.$$

A única escolha de sinais que admite raiz positiva real é $\varepsilon = \delta = 1$. Portanto, o centro é (R, R) e a equação fica

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (3, 4)$:

$$(3 - R)^2 + (4 - R)^2 = R^2$$

$$9 - 6R + R^2 + 16 - 8R + R^2 = R^2$$

$$R^2 - 14R + 25 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(25) = 196 - 100 = 96$$

$$R = \frac{14 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{14 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 7 \pm 2\sqrt{6}$$

Portanto, existem duas circunferências possíveis, com raios $R_1 = 7 - 2\sqrt{6}$ e $R_2 = 7 + 2\sqrt{6}$. As equações são:

$$(x - (7 - 2\sqrt{6}))^2 + (y - (7 - 2\sqrt{6}))^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2$$

e

$$(x - (7 + 2\sqrt{6}))^2 + (y - (7 + 2\sqrt{6}))^2 = (7 + 2\sqrt{6})^2$$

29. Ao secionar uma esfera por um plano, forma-se um triângulo retângulo onde a hipotenusa é o raio da esfera (R), um cateto é a distância do centro ao plano (d) e o outro cateto é o raio do círculo formado na seção (r). Pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = d^2 + r^2 \implies r^2 = R^2 - d^2 \implies r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

A área dessa seção circular será $A = \pi r^2$:

$$A = \pi(R^2 - d^2)$$

30. O volume do cone inteiro é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. O plano corta o cone paralelo à base formando um tronco de altura αh . Consequentemente, o cone menor que foi retirado no topo tem altura igual a $h - \alpha h = h(1 - \alpha)$. Como os dois cones são semelhantes, a razão entre seus volumes é o cubo da razão entre suas alturas (constante de semelhança $k = 1 - \alpha$):

$$V_{\text{menor}} = V \cdot (1 - \alpha)^3$$

O volume do tronco é o volume do cone maior menos o cone menor:

$$V_{\text{tronco}} = V - V_{\text{menor}} = V - V(1 - \alpha)^3 = V[1 - (1 - \alpha)^3]$$

Substituindo $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h[1 - (1 - \alpha)^3]$$

Expandindo o cubo, a expressão pode ser reduzida a: $\frac{1}{3}\pi r^2 h(3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)$.

31. Queremos as tangentes à $x^2 + y^2 = 1$ partindo de $P(t, 0)$ com $t > 1$. Uma reta passando por P tem equação $y - 0 = m(x - t) \implies mx - y - mt = 0$. Para ser tangente, a distância do centro $(0, 0)$ a esta reta deve ser igual ao raio (1):

$$d = \frac{|-mt|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\begin{aligned}\frac{m^2 t^2}{m^2 + 1} &= 1 \\ m^2 t^2 - m^2 &= 1 \\ m^2(t^2 - 1) &= 1.\end{aligned}$$

Logo,

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Portanto, as equações das tangentes são:

$$y = \frac{x - t}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{x - t}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Capítulo 37

Fundamentos

1.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Resolução

Somando os valores,

$$5 + 7 + 8 + 10 = 30.$$

Como existem 4 dados,

$$\bar{x} = \frac{30}{4} = 7,5.$$

$\bar{x} = 7,5$

2.

1, 4, 4, 6, 9

Resolução

Como há cinco elementos, a mediana é o valor central.

Mediana = 4

3.

2, 2, 3, 4, 4, 4, 7

Resolução

O número que aparece mais vezes é

4.

Logo,

$$\boxed{\text{Moda} = 4}$$

4.

1, 3, 5, 7

Resolução

A média é

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = 4.$$

A variância populacional é

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(1 - 4)^2 + (3 - 4)^2}{4} \\ &\quad + \frac{(5 - 4)^2 + (7 - 4)^2}{4}. \\ \sigma^2 &= \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = 5.\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{x} = 4}$$

$$\boxed{\sigma^2 = 5}$$

Aplicação

5.

0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5

A soma é

Resolução

23.

Logo,

$$\bar{x} = \frac{23}{10} = 2,3.$$

A mediana é

$$\frac{2+2}{2} = 2.$$

A moda é

2.

$$\boxed{\bar{x} = 2,3}$$

$$\boxed{\text{Mediana} = 2}$$

$$\boxed{\text{Moda} = 2}$$

6.

160, 165, 170, 175, 180

Resolução

A média é

$$170.$$

A variância é

$$\frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = 50.$$

O desvio padrão é

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sigma^2 = 50}$$

$$\boxed{\sigma = 5\sqrt{2}}$$

7.

$$6 - 2$$

Resolução

A nota ficou 2 pontos abaixo da média.

$$6 - 2 = 4.$$

$$\boxed{4, 0}$$

8.

$$10n + 20 = 11(n + 1)$$

Resolução

A soma inicial era

$$10n.$$

Após adicionar 20,

$$10n + 20 = 11(n + 1).$$

$$10n + 20 = 11n + 11.$$

$$n = 9.$$

9

Domínio

9.

 σ **Resolução**

Um desvio padrão maior indica que os dados estão mais espalhados em torno da média.

Maior dispersão dos dados.

10.

1, 1, 1, 9, 9, 9

Resolução

A média é

$$\bar{x} = \frac{30}{6} = 5.$$

A mediana é

$$\frac{1 + 9}{2} = 5.$$

Neste caso,

média = mediana = 5.

As duas medidas representam igualmente o centro dos dados.

11.

Histograma

Resolução

As frequências das classes $[0, 2)$, $[2, 4)$, $[4, 6)$ e $[6, 8)$ são, respectivamente, 3, 7, 5 e 2. A maior delas é 7, correspondente à classe

$$[2, 4).$$

12.

Gráfico de barras

Resolução

No gráfico, as frequências de A , B , C e D são 25, 36, 18 e 30. Portanto, a categoria de maior frequência é B , e a de menor frequência é C :

$$\text{maior: } B (36) \quad \text{menor: } C (18).$$

Coroação

13.

$$\sum (x_i - \bar{x})$$

Resolução

Temos

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x}.$$

Como

$$\sum \bar{x} = n\bar{x}$$

e

$$n\bar{x} = \sum x_i,$$

segue que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

14.

$$x \longrightarrow x + 3$$

Resolução

Somar uma constante a todos os dados aumenta a média pela mesma constante.

Assim,

$$\bar{x} = 8 + 3 = 11.$$

A variância não se altera.

Logo,

Nova média = 11

Nova variância = 4

Capítulo 38

Fundamentos

1.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

Resolução

$$4,2 \text{ km} = 4200 \text{ m}$$

$$35 \text{ cm} = 350 \text{ mm}$$

4200 m

350 mm

2.

$$1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$$

Temos

$$0,08 \times 10000 = 800.$$

Logo,

800 cm ²

3.

$$a \times 10^n$$

Resolução

$$0,00039 = 3,9 \times 10^{-4}$$

$$7\,800\,000 = 7,8 \times 10^6$$

$$\boxed{3,9 \times 10^{-4}}$$

$$\boxed{7,8 \times 10^6}$$

4.

$$(5 \times 10^3)(2 \times 10^{-5})$$

Resolução

Multiplicando os coeficientes,

$$5 \cdot 2 = 10.$$

Somando os expoentes,

$$10^{3-5} = 10^{-2}.$$

Assim,

$$10 \times 10^{-2} = 1 \times 10^{-1}.$$

$$\boxed{1 \times 10^{-1}}$$

5.

$$2,9 \times 10^6$$

Resolução

Como

$$2,9 < \sqrt{10},$$

a ordem de grandeza permanece

$$10^6.$$

$$\boxed{10^6}$$

Aplicação

6.

$$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

Resolução

Logo,

$$2,5 \text{ L} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$\boxed{2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$

7.

$$A = 21 \cdot 29,7$$

Resolução

Calculando,

$$A = 623,7 \text{ cm}^2.$$

Como

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2,$$

temos

$$A = 6,237 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

$$\boxed{6,24 \times 10^{-2} \text{ m}^2}$$

8.

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

Resolução

Temos

$$0,00032 \text{ m} = 3,2 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Logo,

$$3,2 \times 10^{-4} \times 10^6 = 320.$$

$$\boxed{320 \mu\text{m}}$$

9.

$$3,40 \times 10^2$$

Resolução

Os algarismos significativos são

3, 4, 0.

Logo,

3 algarismos significativos.

Domínio

10.

$$9,9 \times 10^{-2}$$

Resolução

Como

$$9,9 > \sqrt{10},$$

a ordem de grandeza é

$$10^{-1}.$$

Para

$$1,1 \times 10^{-1},$$

também obtemos

$$10^{-1}.$$

Ambas possuem ordem 10^{-1} .

11.

$$A = L \cdot W$$

Resolução

Calculando,

$$A = 12,30 \cdot 3,2 = 39,36.$$

Como o menor número possui 2 algarismos significativos,

$$A \approx 39 \text{ cm}^2.$$

12.

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

Resolução

Sabemos que

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Como

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L},$$

segue que

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}.$

Coroação

13.

$$N = 10^k$$

Resolução

O número de dígitos de um inteiro positivo é

$$[\log_{10} N] + 1.$$

Para

$$2^{100},$$

temos

$$100 \log_{10} 2 \approx 30,103.$$

Assim,

$$30 + 1 = 31.$$

$2^{100} \text{ possui } 31 \text{ dígitos.}$

14.

0,0300

Em

Resolução

0,0300,

0,03

os zeros finais são significativos: a escrita informa três algarismos significativos.

Já

0,03

possui apenas um algarismo significativo.

Conclusão. As duas escritas representam o mesmo valor numérico, mas 0,0300 comunica uma medição registrada com maior precisão. Isso não permite, por si só, afirmar que a medida é mais exata.

Capítulo 39

Fundamentos

1.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Resolução

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5}$$

$$\boxed{\bar{x} = 6}$$

2.

3, 7, 8, 8, 9

Resolução

Há cinco elementos.

O valor central é

$$\boxed{8}$$

3.

Resolução

1, 1, 2, 3, 3, 3, 4

O valor que mais aparece é

3.

$$\boxed{\text{Moda} = 3}$$

4.

Resolução

1, 3, 5, 7

$$\bar{x} = 4.$$

$$\sigma^2 = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = 5.$$

$$\boxed{\bar{x} = 4}$$

$$\boxed{\sigma^2 = 5}$$

5.

Resolução

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$4,8 \text{ km} = 4800 \text{ m}$$

$$10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$$

$$250 \text{ mm} = 25 \text{ cm}$$

$$\boxed{4800 \text{ m}}$$

$$\boxed{25 \text{ cm}}$$

6.

Resolução

$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$$

$$0,12 \times 10^4 = 1200.$$

$$\boxed{1200 \text{ cm}^2}$$

7.

$$a \times 10^n$$

Resolução

$$0,000072 = 7,2 \times 10^{-5}$$

$$9\,500\,000 = 9,5 \times 10^6$$

$$\boxed{7,2 \times 10^{-5}}$$

$$\boxed{9,5 \times 10^6}$$

8.

$$3,1 \times 10^{-7}$$

Resolução

$$3,1 < \sqrt{10},$$

a ordem de grandeza é

$$\boxed{10^{-7}}$$

9.

$$0,00340$$

Resolução

$$0,00340$$

possui

$$\boxed{3}$$

algarismos significativos.

$$2,00 \times 10^5$$

também possui

$$\boxed{3}$$

algarismos significativos.

Aplicação

10.

12, 13, 13, 14, 14, 14, 16

Resolução

$$\bar{x} = \frac{96}{7} \approx 13,7$$

A mediana é

14.

A moda é

14.

$$\bar{x} \approx 13,7$$

$$\text{Mediana} = 14$$

$$\text{Moda} = 14$$

11.

4, 5, 5, 6, 6, 7, 9

Resolução

A média é

6.

A variância é

$$\frac{4 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 9}{7} = \frac{16}{7}.$$

Logo,

$$\sigma = \sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \approx 1,51$$

12.

0,00560 kg

Resolução

$$0,00560 \text{ kg} = 5,60 \text{ g}$$

Em notação científica,

$$5,60 \times 10^0 \text{ g}$$

13.

$$(6,0 \times 10^4)(3,0 \times 10^{-2})$$

Resolução

$$6,0 \cdot 3,0 = 18.$$

$$10^{4-2} = 10^2.$$

$$18 \times 10^2 = 1,8 \times 10^3.$$

$$1,8 \times 10^3$$

14.

20, 32, 12, 26

Resolução

A maior barra corresponde à

Turma T2

e a menor à

Turma T3.

15.

$[0, 2)$, $[2, 4)$, $[4, 6)$, $[6, 8)$

Resolução

A barra mais alta é a do intervalo

$[2, 4)$.

16.

$$12n + 28 = 12,5(n + 2)$$

Resolução

A soma inicial é

$$12n.$$

Somando os dois valores,

$$8 + 20 = 28,$$

e o conjunto passa a ter $n + 2$ dados:

$$12n + 28 = 12,5(n + 2).$$

$$12n + 28 = 12,5n + 25.$$

$$3 = 0,5n.$$

$$n = 6$$

Domínio

17.

 σ **Resolução**

Maior desvio padrão significa maior dispersão dos dados em torno da média.

Dados mais espalhados.

18.

1, 1, 1, 1, 9

Resolução

$$\bar{x} = \frac{13}{5} = 2,6.$$

A mediana é

1.

Como existe um valor extremo,

Conclusão. A mediana representa melhor o centro desse conjunto.

19.

1200 m

Resolução

Com dois algarismos significativos,

$$1,2 \times 10^3$$

Com quatro,

$$1,200 \times 10^3$$

20.

2,5 m³

Resolução

Como

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L},$$

temos

$$2500 \text{ L} = 2,5 \times 10^3 \text{ L}.$$

21.

0, 0, 0, 2, 2

Resolução

A média é

$$0,8.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{0,64 + 0,64 + 0,64 + 1,44 + 1,44}{5} \\ &= \frac{4,8}{5}.\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = 0,96$$

Coroação

22.

$$x_i \rightarrow x_i + c$$

Resolução

Somando uma constante a todos os valores,

$$\bar{x}_{novo} = \bar{x} + c.$$

Como todos os desvios permanecem iguais,

$$\sigma_{novo}^2 = \sigma^2.$$

23.

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

Resolução

Como $\sigma > 0$, a padronização está bem definida. Além disso,

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0,$$

segue que

$$\bar{y} = 0.$$

Além disso,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = 1.$$

$$\sigma_y^2 = 1.$$

24.

$$\frac{(7,6 \times 10^6)(3,2 \times 10^{-4})}{9,5 \times 10^2}$$

Resolução

Calculando,

$$\frac{24,32}{9,5} \times 10^0 \approx 2,56.$$

Como

$$2,56 < \sqrt{10},$$

a ordem de grandeza é

$$10^0.$$

Capítulo 40

Fundamentos

1. A expressão “no máximo 12” indica que o valor não pode ultrapassar 12. Se a quantidade é x , então

$$x \leq 12.$$

2. Um aumento de 15% corresponde ao fator

$$1 + \frac{15}{100} = 1,15.$$

3. É preciso conferir as restrições do problema. Como comprimento não pode ser negativo, $x = -3$ não pode ser aceito como medida. Isso pode indicar uma raiz estranha, uma escolha inadequada de variável ou um modelo que só admite $x \geq 0$.

Aplicação

4. A grandeza pedida é a velocidade média:

$$v_m = \frac{180 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 60 \text{ km/h}.$$

5. Quando a afirmação depende de todo $n \in \mathbb{N}$, uma técnica natural é a **indução matemática**: verifica-se um caso inicial e demonstra-se que a validade para um índice implica a validade para o seguinte. Antes de aplicá-la, convém verificar se a estrutura da afirmação realmente permite esse encadeamento.

6. Três horas correspondem a 180 minutos. Assim,

$$\frac{180}{30} = 6 \text{ minutos por questão}.$$

Essa é apenas uma média. Na primeira passagem, o ideal é resolver as questões mais diretas em menos tempo e reservar parte dos minutos para as mais trabalhosas e para a revisão.

Domínio

7. Um exemplo simples é substituir $\frac{1}{3}$ por 0,33 antes do final. Ao multiplicar por 3, obtemos 0,99, enquanto o valor exato é

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

O arredondamento antecipado alterou a resposta.

8. Primeiro pergunto se a ordem dos escolhidos produz resultados diferentes. Depois verifico se todos os elementos serão usados e se pode haver repetição. Se todos são usados e a ordem importa, penso em permutação; se apenas parte é escolhida e a ordem importa, em arranjo; se a ordem não importa, em combinação. Restrições podem exigir divisão em casos ou contagem pelo complementar.

Coroação

9. Um plano possível é: identificar as grandezas e suas unidades; converter todos os dados para uma mesma unidade; escrever os valores muito grandes ou pequenos em notação científica; efetuar o cálculo sem arredondar cedo; localizar no gráfico a variável e a escala pedidas; por fim, conferir unidade, ordem de grandeza e coerência com a leitura gráfica.

Capítulo 41

Fundamentos

1. Como $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ e $x \neq 3$,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \boxed{x + 3}.$$

2. Elevando a igualdade ao quadrado,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 25.$$

Portanto,

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 23}.$$

3. Como $81 < 95 < 100$, ao extrair as raízes positivas obtemos

$$\boxed{9 < \sqrt{95} < 10}.$$

4. Toda potência de base ímpar é ímpar. Logo,

$$\boxed{3^{202} \text{ é ímpar}}.$$

Aplicação

5. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 4.$$

Assim, $a + b \geq 8$, com igualdade em $a = b = 4$. O mínimo é

$$\boxed{8}.$$

6. Como $199 > 196 = 14^2$,

$$\boxed{\sqrt{199} > 14}.$$

7. Se os lados são a e b , então $a + b = 10$. Como

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 25,$$

a maior área é 25, obtida em $a = b = 5$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado.

8. Sim. Por exemplo,

$$0 + 3 + 3 - 5 = 1.$$

Portanto, é possível chegar exatamente a $\boxed{1}$.

Domínio

- 9.

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 8^2 - 2 \cdot 15 = \boxed{34}.$$

10. Pela desigualdade

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

temos $a^2 + b^2 + c^2 \geq 27$. A igualdade ocorre em $a = b = c = 3$. Logo, o mínimo é

$$\boxed{27}.$$

11. Em um tabuleiro quadriculado, a cor depende da paridade da soma das coordenadas. Cada movimento aumenta uma das coordenadas em 2; portanto, não altera a paridade de $x + y$. A peça permanece sempre em casas da mesma cor.

Coroação

12. Se $n = 2k$, então $n^2 = 4k^2$ e o resto é 0. Se $n = 2k + 1$, então

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1,$$

e o resto é 1. Portanto, n^2 deixa resto $\boxed{0 \text{ ou } 1}$ na divisão por 4.

13. Seja $s = x + \frac{1}{x} = 4$. Então

$$s^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Logo,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 4^3 - 3 \cdot 4 = \boxed{52}.$$

Capítulo 42

Fundamentos

$$1. \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{16} = \boxed{4}.$$

$$2. \frac{3}{5} - \frac{7}{10} = \frac{6}{10} - \frac{7}{10} = \boxed{-\frac{1}{10}}.$$

$$3. 2x - 9 = 5 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow \boxed{x = 7}.$$

$$4. x^2 - 10x + 25 = \boxed{(x - 5)^2}.$$

$$5. x^2 - 5x = x(x - 5) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 5}.$$

$$6. \text{É necessário } 2x - 1 \geq 0. \text{ Portanto, o domínio é } \boxed{\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)}.$$

$$7. a_{12} = 2 + 11 \cdot 3 = \boxed{35}.$$

$$8. a_5 = 81 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \boxed{1}.$$

9. $AB = \sqrt{(7-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}.$

10. A equação é $\boxed{y = -3x + 4}.$

11. Completando quadrados,

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Logo, o centro é $\boxed{(3, -2)}$ e o raio é $\boxed{4}.$

12. $3,6 \text{ km} = 3600 \text{ m} = \boxed{3,6 \times 10^3 \text{ m}}.$

13. Os dados já estão ordenados; o termo central é $\boxed{3}.$

Aplicação

14. O coeficiente angular é $\frac{9-1}{6-2} = 2$. Usando $(2, 1)$,

$$1 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -3.$$

Portanto, $\boxed{f(x) = 2x - 3}.$

15. As raízes são -4 e 1 . O produto é não positivo entre elas:

$$\boxed{-4 \leq x \leq 1}.$$

16.

$$200 \cdot 0,85 \cdot 1,10 = \boxed{\text{R\$ } 187,00}.$$

17.

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \boxed{\frac{3}{28}}.$$

18. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = \boxed{90\pi}.$

19.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow \boxed{r = 3}.$$

20. Substituindo $y = x + 1$,

$$x^2 + (x+1)^2 = 10 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 9 = 0.$$

Assim,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}, \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2}.$$

Os pontos são

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{19}}{2}, \frac{1 + \sqrt{19}}{2} \right) \text{ e } \left(\frac{-1 - \sqrt{19}}{2}, \frac{1 - \sqrt{19}}{2} \right).$$

21. A base mede 4 e a altura mede 3. Logo,

$$A = \frac{4 \cdot 3}{2} = \boxed{6}.$$

22. Antes da inclusão havia 8 valores, com soma $8 \cdot 10 = 80$. Depois,

$$\frac{80 + x}{9} = 10,5 \Rightarrow 80 + x = 94,5.$$

Portanto, $\boxed{x = 14,5}$.

Domínio

23. Os números x e y têm soma 7 e produto 10; portanto, são raízes de $t^2 - 7t + 10 = 0$. Logo,

$$\boxed{(x, y) = (2, 5) \text{ ou } (5, 2)}.$$

24. A circunferência tem centro $(1, -2)$ e raio 3. Todas as retas da família $y = mx - 2$ passam pelo ponto $(0, -2)$, cuja distância ao centro é 1. Como esse ponto está no interior da circunferência, qualquer reta que passe por ele corta a circunferência em dois pontos e não pode ser tangente. Assim,

$$\boxed{\text{não existe valor real de } m}.$$

25. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow \boxed{h = 8 \text{ m}}.$$

26.

$$\frac{(4,8 \times 10^7)(3,0 \times 10^{-5})}{1,6 \times 10^2} = 9,0.$$

Como $9 > \sqrt{10}$, a ordem de grandeza é $\boxed{10^1}$.

27. $a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ e $a_3 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$. Subtraindo o ponto fixo $\frac{1}{2}$, obtemos uma PG de razão 3. Assim,

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

28.

$$\frac{V_{\text{cone}}}{V_{\text{cil}}} = \frac{\pi r^2 h / 3}{\pi r^2 h} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

29. A segunda classe é a classe modal, pois possui a maior frequência, 7. **Classe modal** é o intervalo ou categoria que reúne o maior número de observações.

Coroação

30. Para $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, com igualdade em $x = 1$. O mínimo é $\boxed{2}$; o valor dado, 3, está acima desse mínimo.

31. Se $n = 2k$, então $n^2 = 4k^2$. Se $n = 2k + 1$, então

$$n^2 = 4k(k + 1) + 1.$$

Portanto, o resto é sempre $\boxed{0 \text{ ou } 1}$.

32. Há cinco números ímpares. Para a soma ser par, devemos escolher uma quantidade par deles:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16.$$

Os cinco números pares podem ser escolhidos livremente, produzindo $2^5 = 32$ possibilidades. Logo,

$$16 \cdot 32 = \boxed{512}.$$

33. O segmento AB é horizontal e seu ponto médio é $(2, 1)$. Sua mediatriz é a reta vertical

$$\boxed{x = 2}.$$

Ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B .